

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки

Кафедра автоматизації, електротехнічних та
комп'ютерно-інтегрованих технологій

04-03-236

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни
«Математичні задачі енергетики»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальністю
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією зі спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»
Протокол № 6 від 14.05.2019р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Математичні задачі енергетики» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання / Василюк С. В., Василюк К. С. – Рівне : НУВГП, 2019. – 83 с.

Укладачі:

Василюк С. В., професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій, доктор технічних наук, доцент;

Василюк К. С., асистент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск:

Древецький В. В., завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій, докт. техн. наук, професор.

© Василюк С. В.,
Василюк К. С., 2019
© НУВГП, 2019

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Лабораторна робота № 1. Основні методи роботи з системою Mathcad.....	5
Лабораторна робота № 2. Матричні операції у Mathcad.....	9
Лабораторна робота № 3. Робота з комплексними числами у Mathcad	13
Лабораторна робота № 4. Моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола.....	17
Лабораторна робота № 5. Моделювання перехідних процесів в одномасовому лінійному електромеханічному перетворювачі.....	27
Лабораторна робота № 6. Моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі.....	34
Лабораторна робота № 7. Моделювання перехідного процесу пуску асинхронного двигуна.....	42
Лабораторна робота № 8. Апроксимація експериментальних даних за допомогою методу найменших квадратів.....	52
Лабораторна робота № 9. Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини.....	59
Лабораторна робота № 10. Параметричне оцінювання випадкових процесів.....	63
Література.....	82

ПЕРЕДМОВА

Метою навчальної дисципліни «Математичні задачі електроенергетики» є формування у здобувачів вищої освіти здатностей та навичок моделювання усталених та перехідних процесів в електромережах промислових підприємств, міст і сільського господарства.

Методичні вказівки включають опис лабораторних робіт, що виконуються здобувачами вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання.

В результаті виконання лабораторних робіт здобувачі вищої освіти мають оволодіти базовими знаннями з математичного моделювання усталених процесів в електромережах, набути базових знань щодо способів топологічного опису електромереж, вивчити методи оцінки значень параметрів елементів електромереж, володіти прийомами складання топологічних рівнянь стану, навчитися аналізувати процеси в електромережах промислових підприємств, міст і сільського господарства.

Тематика лабораторних робіт тісно пов'язана з лекційним матеріалом, тому під час підготовки до лабораторної роботи необхідно ґрунтовно вивчити відповідний теоретичний матеріал. Крім того, готуючись до лабораторної роботи, необхідно ознайомитися з методичними вказівками, підготувати необхідні рівняння, структурні схеми, моделі тощо. Лабораторні роботи виконуються з використанням програми Mathcad.

За результатами виконання кожної лабораторної роботи здобувач вищої освіти готує звіт відповідно до вимог, які наведені в кінці вказівок до кожної роботи. Здобувач має подати викладачеві звіт та захистити його на наступному лабораторному занятті. Під час підготовки до захисту слід орієнтуватися на перелік контрольних запитань.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Основні методи роботи з системою Mathcad

Мета: освоїти основні методи обчислень у системі Mathcad.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Створити у документ Mathcad, що зображений на рис 1.1.

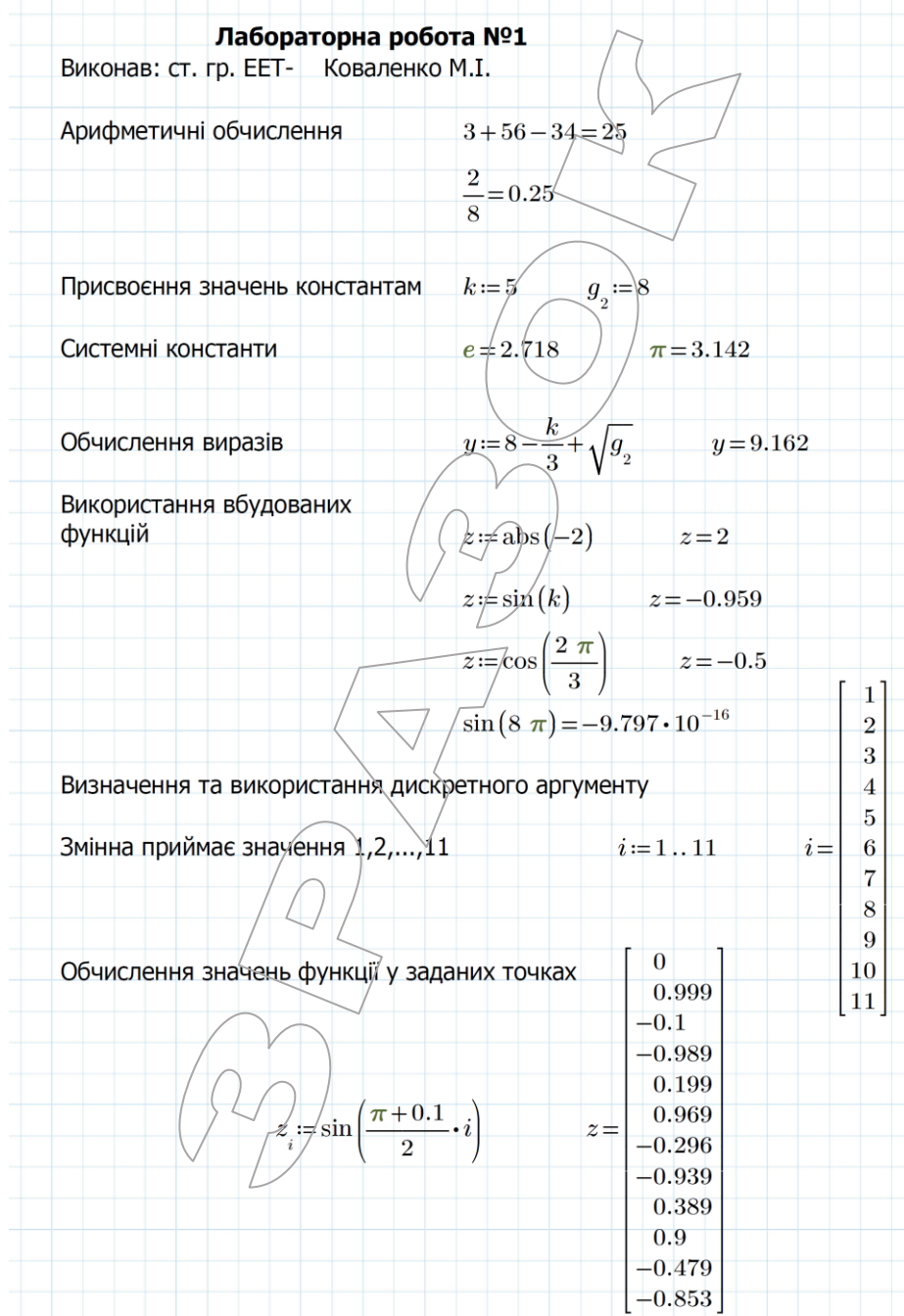


Рисунок 1.1 – Mathcad документ з найпростішими обчисленнями

2. Обчислити у Mathcad значення функції згідно з табл. 1.1. при зміні x від x_{min} до x_{max} та побудувати графік. Приклад виконання цього завдання наведено на рис. 1.2.

Таблиця 1.1

Задані функції			
Варіант №	Функція	x_{min}	x_{max}
1	$y(x) = e^{2x} - \sin x^2 + \cos^2 2x$	0,1	1
2	$y(x) = \frac{1}{2x} + \ln x - \sin 3x^2 + 2$	1	5
3	$y(x) = \lg x^5 + \frac{1}{2x} + \sin 3x - 8 + 2x$	0,2	0,9
4	$y(x) = 2x^5 + \frac{4}{3x} - \operatorname{tg} x + 8$	5	7
5	$y(x) = e^{4x^2} - 8 \sin e^{4x}$	0,1	2,4
6	$y(x) = \sin 5x - 0,01e^{0,3x} - 100$	9,1	10,3
7	$y(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x} - 4^x + x^{0,1}$	1,1	3,3
8	$y(x) = 2x^2 - \sin \sqrt[3]{x} + 10$	3,2	8,4
9	$y(x) = \frac{2}{x} + 2x - \cos x^2$	-1	1
10	$y(x) = \sin^2 \left(\cos 2x \right) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$	1	2
11	$y(x) = \log_3 x^3 + 2x - \frac{4}{5x} - 3$	9	9,2
12	$y(x) = 2x^2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x^{\ln x}$	1	1,2
13	$y(x) = x^{x^{0,1}} - \operatorname{tg} \frac{\sin x}{2} + 2 \cos^2 8\sqrt{x}$	2	3,5
14	$y(x) = \left(-9 \right)^{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2x} - 3 \frac{x}{\sqrt{\sin^2 x}}$	2,1	2,5
15	$y(x) = \log_2 x - \sin^3 \frac{x}{2} + \sqrt{2x^{\ln x}}$	4	4,3

Завдання. Обчислити значення заданої функції на вказаному інтервалі та побудувати графік

$$y(x) := \sin(2x) - x^2 + e^{0.1x} \quad x_{\min} := 0.1 \quad x_{\max} := 5$$

$N := 100$ Кількість точок для обрахування значень функції

$$\Delta x := \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$$

$$\Delta x = 0.049$$

Крок аргумента для
обрахувань значень функції

$$i := 0, 1..N$$

$$x_i := x_{\min} + i \cdot \Delta x$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.149 \\ 0.198 \\ 0.247 \\ 0.296 \\ 0.345 \\ 0.394 \\ 0.443 \\ 0.492 \\ 0.541 \\ 0.59 \\ 0.639 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y(x_i) =$$

$$\begin{bmatrix} 1.199 \\ 1.286 \\ 1.367 \\ 1.438 \\ 1.5 \\ 1.553 \\ 1.594 \\ 1.624 \\ 1.641 \\ 1.646 \\ 1.637 \\ 1.615 \\ 1.579 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Значення заданої функції
в довільних точках

$$y(0.1) = 1.199$$

$$y(3.5) = -10.174$$

$$y(5) = -23.895$$

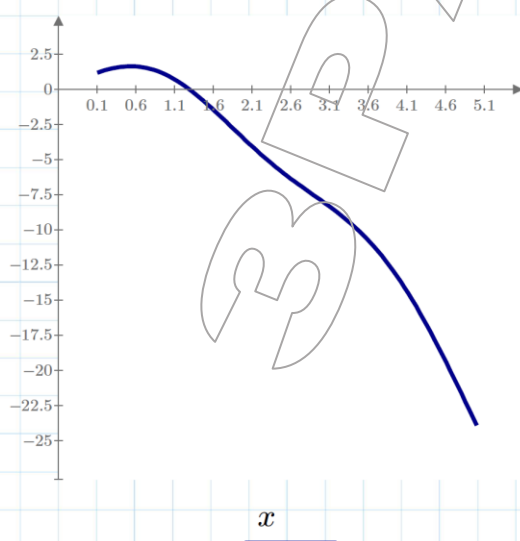


Рисунок 1.2 – Приклад обчислення у Mathcad значення функції

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Mathcad документ з найпростішими обчисленнями, виконаний згідно рис. 1.1.
3. Обчислення у Mathcad значення заданої за варіантом функції, виконані відповідно до рис. 1.2.
4. Висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що виконує наведена команда Mathcad?

$$y = 9.162$$

2. Яку дію виконує наведена команда Mathcad?

$$i := 1 \dots 11$$

3. Яку дію виконує наведена команда Mathcad?

$$z := 2.5$$

4. Що являє собою z після виконання команди Mathcad?

$$z_i := \sin \left(\frac{\pi + 0.1}{2} \cdot i \right)$$

5. Яка команда Mathcad обчислює модуль числа?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Матричні операції у Mathcad

Мета: оволодіти навичками матричних обчислень у пакеті Mathcad.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Виконати елементарні матричні операції відповідно до Mathcad-документів, що зображені на рис 2.1 та рис. 2.2.

2. Розробити Mathcad-документ, в якому задаються квадратні матриці M та R розмірністю N , елементи яких обчислюються згідно з табл. 2.1, причому i позначає номер рядка, j – номер стовпчика. Для заданих матриць M та R необхідно виконати наступні розрахунки:

$$M^T; R^T; (M + R)^{-1}; M \cdot R^{-1}; M^T + 2R^{-1}; M - R(M^T + R). \quad (2.1)$$

Таблиця 2.1

№ варіанта	Розмірність матриць N	Вихідні дані Елементи матриці	
		M	R
1	4	$M_{i,j} = 4i + j$	$R_{i,j} = 0,1j - 2i$
2	5	$M_{i,j} = \frac{8}{i} - 2 + j$	$R_{i,j} = \sin(j) - i$
3	3	$M_{i,j} = \sin(\pi \cdot i) \cdot j$	$R_{i,j} = \cos(\pi \cdot j) + 3i$
4	6	$M_{i,j} = 0,1j \cdot 2^{0,1i}$	$R_{i,j} = 2j - i$
5	7	$M_{i,j} = \operatorname{tg}(\pi \cdot i) + 2$	$R_{i,j} = \ln(2j - i + 10)$
6	3	$M_{i,j} = 2i + 4j - 9$	$R_{i,j} = 4,5i - 2j + 9$
7	4	$M_{i,j} = \sin i - j$	$R_{i,j} = j^2 - 3i$
8	5	$M_{i,j} = 3i - 2j + ij$	$R_{i,j} = ij - 2i + 1$
9	6	$M_{i,j} = 8i - 2j$	$R_{i,j} = \cos^2 i + j$
10	7	$M_{i,j} = 2i - j + 10$	$R_{i,j} = 8 \sin i + j^2$
11	4	$M_{i,j} = 100j \cdot 2^i$	$R_{i,j} = \sqrt{i + j}$
12	5	$M_{i,j} = \sqrt{i - 2j}$	$R_{i,j} = i + 2j$
13	6	$M_{i,j} = i + 4j - 8$	$R_{i,j} = i + j - 8j^2$
14	3	$M_{i,j} = \operatorname{ctg}(\pi \cdot i - 2) + 2$	$R_{i,j} = i - 3j + \pi$
15	5	$M_{i,j} = \frac{6}{j+1} + 1$	$R_{i,j} = 6j - i^2$

Лабораторна робота №2

Матричні операції у Mathcad

Виконав:

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{- вектор} \quad V_0 = 1 \quad V_3 = 7 \quad \text{- елементи вектора}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{- матриця} \quad M_{0,0} = 1 \quad M_{1,0} = 3 \quad \text{- елементи матриці}$$

$$a := 1 \quad b := 3 \quad M1 := \begin{bmatrix} a+1 & b+2 & a \\ \sin(2a) & 2 & b \end{bmatrix} \quad \text{- матриця з елементами-функціями}$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0.909 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N_{0,0} := 10 \quad N_{1,0} := 14 \quad \text{- поелементне задавання матриці}$$

$$N_{0,1} := 12 \quad N_{1,1} := 16 \quad N = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

Виділення з матриці стовпчика та рядка: $N^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \hat{N} = [14 \ 16]$

Обчислення векторів значень функцій:

$$X := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.467 \end{bmatrix} \quad \sin(X) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.296 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

Задавання матриці за допомогою ранжованих змінних:

$$i := 0..3 \quad j := 0..3 \quad S_{i,j} := 4 \cdot i + j \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

Додавання скаляра до матриці:

$$2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad 5 + S = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Множення матриці на скаляр:

$$10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} \quad 32 \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 32 & 64 & 96 \\ 128 & 160 & 192 & 224 \\ 256 & 288 & 320 & 352 \\ 384 & 416 & 448 & 480 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.1 – Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad

Додавання та віднімання матриць:

$$N1 := \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix} \quad N2 := \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \quad N1 + N2 = \begin{bmatrix} 16 & 40 \\ 47 & 49 \end{bmatrix}$$

$$N3 := N1 - N2 \quad N3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$$

Матричне множення:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 2 & 0.2 \\ 3 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1.4 \\ 32 & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$Q := N1 \cdot N2 \quad Q = \begin{bmatrix} 239 & 440 \\ 511 & 1.1 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Транспонування матриць:

$$N1 = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix} \quad N1^T = \begin{bmatrix} 13 & 37 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = [1 \ 2 \ 3]$$

$$X := N1 + 4 \cdot N2^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 25 & 60 \\ 117 & 76 \end{bmatrix}$$

Обчислення зворотної матриці:

$$N1 = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 37 & 40 \end{bmatrix}$$

$$N1inv := N1^{-1}$$

$$N1inv = \begin{bmatrix} -0.182 & 0.091 \\ 0.168 & -0.059 \end{bmatrix}$$

Перевірка:

$$N1 \cdot N1inv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сума елементів вектора:

$$\sum \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$$

Функція, що повертає одиничну матрицю заданої розмірності:

$$\text{identity}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.2 – Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Виконання елементарних матричних операцій у Mathcad відповідно до рис. 2.1 та рис. 2.2.
3. Вихідні дані відповідно до варіанту з табл. 2.1.
4. Mathcad-документ, в якому для матриць M та R проведені розрахунки відповідно до виразів (2.1).
5. Висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що являє собою V після виконання команди Mathcad?

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. Для чого використовуються наведені команди Mathcad?

$$V_0 = 1$$

$$M_{0,0} = 1$$

$$N^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}^1 = \begin{bmatrix} 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$N1^T$$

$$N1^{-1}$$

3. Що обчислює команда Mathcad?

$$\sum \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Для чого використовується команда Mathcad?

$$\text{identity}$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Робота з комплексними числами у Mathcad

Мета: оволодіти навичками здійснення базових операцій над комплексними величинами у Mathcad.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Виконати базових операцій над комплексними величинами у Mathcad відповідно до Mathcad-документу, що зображений на рис 3.1.

2. Розробити Mathcad-документ, в якому символічним методом обчислюються падіння напруги на елементах послідовного *RLC*-навантаження, що підключено до джерела *E* синусоїдної ЕРС промислової частоти, а також обраховуються активна, реактивна та повна потужність, що споживається навантаженням. Вихідні дані обираються згідно з табл. 3.1. Приклад розв'язання задачі наведено на рис. 3.2.

Таблиця 3.1

Вихідні дані

№ варіанта	<i>E</i> , В	<i>R</i> , Ом	<i>L</i> , Гн	<i>C</i> , мкФ
1	150	100	0,2	100
2	220	50	0,4	1000
3	189	234	0,6	200
4	349	237	1	220
5	1140	89	1,2	300
6	660	45	1,8	400
7	380	68	2,2	10
8	127	24	0,45	20
9	893	256	0,2	50
10	950	238	1,2	70
11	1230	345	4,5	90
12	500	568	1,2	120
13	380	123	2,3	156
14	227	567	9,5	160
15	395	24	1,2	101

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Виконання базових операцій над комплексними величинами у Mathcad відповідно до рис. 3.1.
3. Вихідні дані відповідно до варіанту з табл. 3.1.
4. Mathcad-документ з розрахунком *RLC*-кола символічним методом.
5. Висновки.

Лабораторна робота №3

Робота з комплексними числами у Mathcad

Уявна одиниця може позначатися як i або як j

$$e^{1i} = 0.54 + 0.841i$$

$$e^{1j} = 0.54 + 0.841i$$

$$a := 2 + 3j$$

$$a = 2 + 3i$$

Дійсна частина

$$\operatorname{Re}(a) = 2$$

Уявна частина

$$\operatorname{Im}(a) = 3$$

Модуль комплексного числа

$$|a| = 3.606$$

$$\text{або } \sqrt{(\operatorname{Re}(a))^2 + (\operatorname{Im}(a))^2} = 3.606$$

Аргумент комплексного числа

$$\arg(a) = 0.983$$

або

$$\operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(a)}{\operatorname{Re}(a)}\right) = 0.983$$

Спряжене число

$$\bar{a} = 2 - 3i$$

Операції над комплексними числами

$$z1 := 0.1 + 2j$$

$$z1 = 0.1 + 2i$$

$$z2 := 4 - 3j$$

$$z2 = 4 - 3i$$

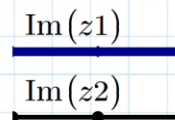
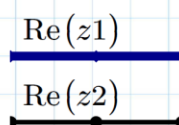
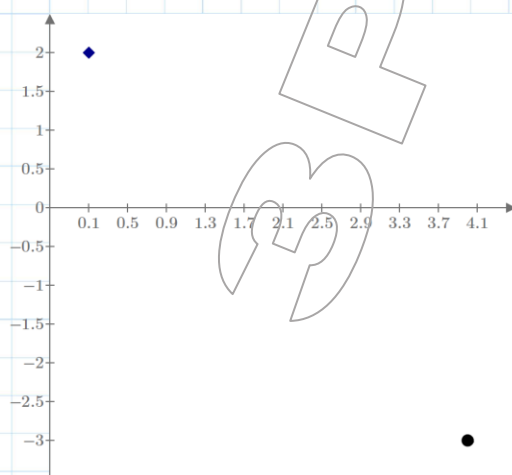
$$z1 + z2 = 4.1 - 1i$$

$$z1 - z2 = -3.9 + 5i$$

$$z1 \cdot z2 = 6.4 + 7.7i$$

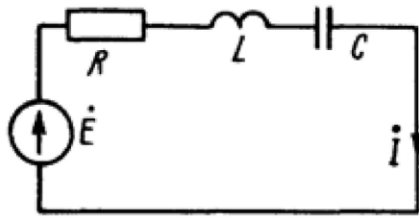
$$\frac{z1}{z2} = -0.224 + 0.332i$$

$$z1^3 = -1.199 - 7.94i$$



Комплексні числа $z1, z2$ на комплексній площині

Рисунок 3.1 - Базові операції над комплексними величинами у Mathcad

Задача.

Дано:

$$E := 100 \text{ V} \quad R := 5 \text{ } \Omega \quad L := 0.1 \text{ H}$$

$$C := 10 \text{ } \mu\text{F} \quad \omega := 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Визначити: U_R , U_L , U_C , P , Q , S

Розрахунок проводимо символічним методом

$$j := \sqrt{-1}$$

Індуктивний опір $x_L := \omega \cdot L = 31.4 \text{ } \Omega$

Ємнісний опір $x_C := \frac{1}{\omega \cdot C} = 318.471 \text{ } \Omega$

Повний комплексний опір кола $Z := R + j \cdot (x_L - x_C) = (5 - 287.071i) \text{ } \Omega$

Струм в колі $I := \frac{E}{Z} = (0.006 + 0.348i) \text{ A}$

Падіння напруги на активному опорі $U_R := R \cdot I = (0.03 + 1.741i) \text{ V}$

Падіння напруги на індуктивності $U_L := j \cdot x_L \cdot I = (-10.935 + 0.19i) \text{ V}$

Падіння напруги на ємності $U_C := j \cdot x_C \cdot I = (-110.904 + 1.932i) \text{ V}$

Перевірка за другим законом Кірхгофа $U_R + U_L - U_C = (100 + 2.22i \cdot 10^{-16}) \text{ V}$

Комплекс повної потужності $S := E \cdot \bar{I} = (0.607 - 34.824i) \text{ W}$

$$S_{WA} := |S| = 34.829 \text{ W} \quad \text{ВА}$$

Активна потужність $P := \text{Re}(S) = 0.607 \text{ W} \quad \text{Вт}$

Реактивна потужність $Q := \text{Im}(S) = -34.824 \text{ W} \quad \text{ВАр}$

Від'ємне значення Q свідчить про переважно ємнісний характер навантаження

Відповідь:

$$U_R = (0.03 + 1.741i) \text{ V}$$

$$U_L = (-10.935 + 0.19i) \text{ V}$$

$$U_C = (-110.904 + 1.932i) \text{ V}$$

$$P = 0.607 \text{ W} \quad \text{Вт}$$

$$Q = -34.824 \text{ W} \quad \text{ВАр}$$

$$S_{WA} = 34.829 \text{ W} \quad \text{ВА}$$

Рисунок 3.2 – Розрахунок RLC -кола символічним методом у Mathcad

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Вкажіть алгебраїчну, експоненціальну та тригонометричну форми запису комплексного числа.

2. Вкажіть, у яких формах записані комплексні числа:

$$x = a + jb;$$

$$x = |x| \cdot e^{j\varphi};$$

$$x = 5 \cdot e^{j2\pi};$$

$$x = 18 \cdot e^{-j2\pi/3};$$

$$x = |x| \cos \varphi + j|x| \sin \varphi;$$

$$x = 2 \cos 2\pi / 6 + j2 \sin 2\pi / 6$$

$$0,54 + 0,84j;$$

$$e^{1j}.$$

3. Як наведені у питанні 2 комплексні числа перевести до інших форм запису?

4. Чому дорівнюють активний та реактивний опір кола, імпеданс якого становить $5 - j18$?

5. Наведіть формулу Ейлера.

6. Чому дорівнює уявна одиниця?

7. Чому дорівнює модуль числа $2 + 3j$?

8. Як позначаються дійсна, уявна частини, аргумент та модуль комплексного числа?

9. Як обрахувати аргумент та модуль комплексного числа?

10. Як комплексне число представляється на комплексній площині?

11. Що являє собою спряжене комплексне число?

12. Як зв'язана повна потужність S трифазної системи з активною P та реактивною Q потужностями?

13. Чому дорівнює активна / реактивна потужність навантаження, якщо відома повна потужність?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола

Мета: освоїти матрично-топологічний метод моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Матрично-топологічний метод аналізу електричних кіл полягає в отриманні матричних рівнянь моделі електричного кола на основі формального представлення її топології (структури) і параметрів окремих компонентів у вигляді відповідних матриць і векторів.

Аналіз електричного кола вказаним методом передбачає формування матриць, що містять інформацію про топологічні і електричні параметри схеми. Цьому передують складання графа і "дерева" електричного кола, нумерація їх гілок, вузлів і незалежних контурів. Аналітичною інтерпретацією топологічних характеристик системи є матриця з'єднань Π , що відображає зв'язок вузлів і гілок графа, і матриця контурів Γ , яка вказує на приналежність гілок графа до вибраних незалежних контурів. Електричні характеристики гілок схеми описуються векторами струмів гілок I , поточкозчеплень Ψ , напруг на ємнісних елементах U_c , зовнішніх ЕРС E та джерел струму J , а також матрицями опорів R , індуктивностей L .

Отримані матриці використовуються для формування рівнянь на підставі закону Ома (4.1), а також I (4.2) і II (4.3) законів Кірхгофа:

$$E = U + Z \cdot I ; \quad (4.1)$$

$$\Pi \cdot I + J = 0 ; \quad (4.2)$$

$$\Gamma^t \cdot U = 0 . \quad (4.3)$$

Спільний розв'язок цих рівнянь відносно вектора струмів гілок I призводить до наступного співвідношення:

$$I = \begin{bmatrix} \Gamma^t \cdot Z \\ \Pi \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma^t \cdot E \\ -J \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Вектор напруг гілок визначається на підставі закону Ома (4.1). Правильність розрахунків перевіряється шляхом обчислення балансу потужностей:

$$S = \hat{U} \times I , \quad (4.5)$$

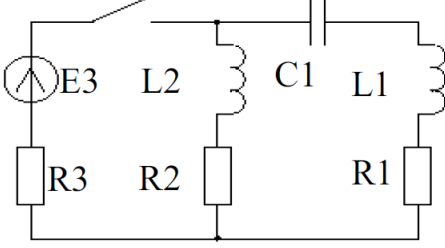
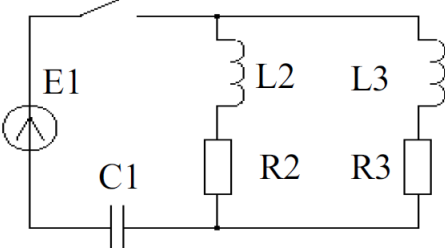
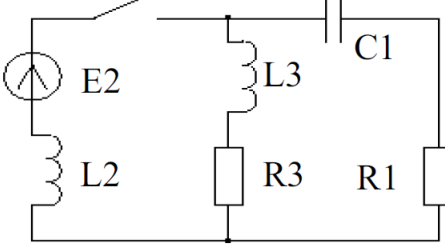
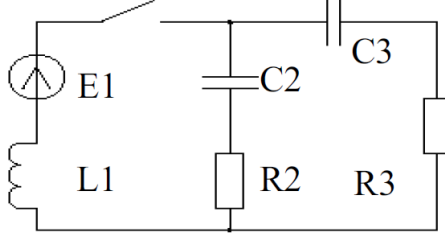
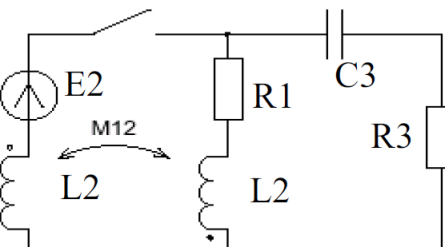
де \hat{U} - комплексно зв'язаний вектор напруги гілок. Сума потужностей усіх гілок схеми має дорівнювати 0.

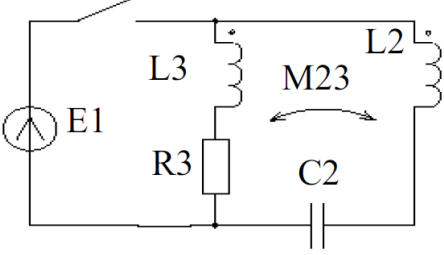
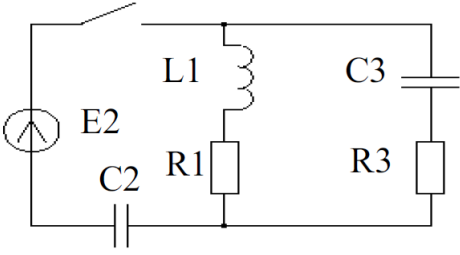
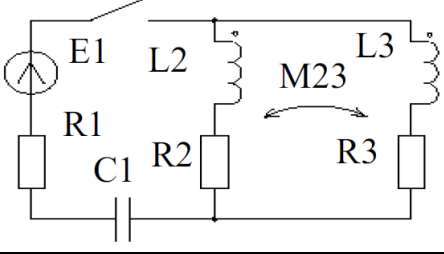
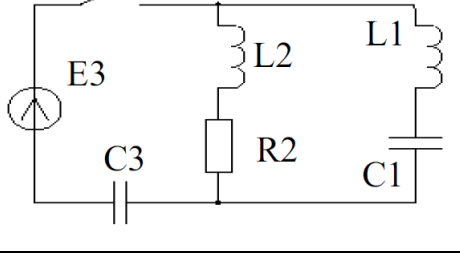
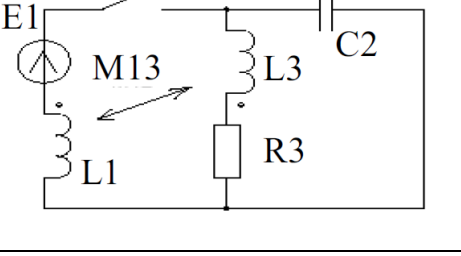
ЗАВДАННЯ

1. Обрати вихідні дані з табл. 4.1 згідно з номером варіанта.

Таблиця 4.1

Вихідні дані

№	Заступна схема	Значення параметрів
1		$C1=10 \text{ мкФ}$, $L1=200 \text{ мГн}$, $R1=10 \text{ Ом}$, $L2=400 \text{ мГн}$, $R2=15 \text{ Ом}$, $E3=200 \text{ В}$, $R3=5 \text{ Ом}$
2		$C1=10 \text{ мкФ}$, $E1=300 \text{ В}$, $L2=400 \text{ мГн}$, $R2=10 \text{ Ом}$, $L3=500 \text{ мГн}$, $R3=20 \text{ Ом}$
3		$C1=10 \text{ мкФ}$, $R1=20 \text{ Ом}$, $L2=300 \text{ мГн}$, $E2=250 \text{ В}$, $L3=500 \text{ мГн}$, $R3=20 \text{ Ом}$
4		$E1=220 \text{ В}$, $L1=300 \text{ мГн}$, $C2=15 \text{ мкФ}$, $R2=10 \text{ Ом}$, $C3=25 \text{ мкФ}$, $R3=5 \text{ Ом}$
5		$L1=400 \text{ мГн}$, $R1=15 \text{ Ом}$, $E2=380 \text{ В}$, $L2=300 \text{ мГн}$, $M12=250 \text{ мГн}$, $C3=20 \text{ мкФ}$, $R3=10 \text{ Ом}$

6		$E1=130\text{ В},$ $L2=150\text{ мГн}, C2=50\text{ мкФ},$ $R3=5\text{ Ом}, L3=200\text{ мГн}, M23=100\text{ мГн}$
7		$R1=10\text{ Ом}, L1=300\text{ мГн},$ $E2=250\text{ В}, C2=30\text{ мкФ},$ $R3=5\text{ Ом}, C3=20\text{ мкФ}$
8		$E1=350\text{ В}, R1=10\text{ Ом}, C1=40\text{ мкФ},$ $L2=400\text{ мГн}, R2=13\text{ Ом},$ $L3=400\text{ мГн}, R3=20\text{ Ом}, M23=350\text{ мГн}$
9		$L1=500\text{ мГн}, C1=20\text{ мкФ},$ $L2=450\text{ мГн}, R2=10\text{ Ом},$ $E3=200\text{ В}, C3=50\text{ мкФ}$
10		$E1=300\text{ В}, L1=450\text{ мГн},$ $C2=30\text{ мкФ},$ $L3=350\text{ мГн}, R3=20\text{ Ом}, M13=300\text{ мГн}$

2. Скласти масиви топологічних і електричних характеристик електричного кола.

3. У пакеті Mathcad здійснити моделювання сталих процесів в електричному колі із заданими параметрами і топологією.

4. Перевірити правильність обчислень шляхом визначення балансу потужностей гілок схеми.

5. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. На початку Mathcad-документа мають бути представлені задана схема і початкові дані. Схему слід зображувати, скориставшись будь-яким графічним редактором, після чого її необхідно вставити з буфера обміну в Mathcad -документ.

В якості початкових даних слід привести опори, індуктивності, ємності пасивних елементів схеми (резисторів, котушок індуктивності, конденсаторів), а також амплітуду, частоту ЕРС активних елементів (джерел). Усі величини мають бути приведені до системи СІ. При цьому для зручності в якості індексу змінної слід використовувати номер відповідної гілки схеми. Окремо необхідно вказати величину колової частоти.

2. На основі заданої схеми слід скласти спрямований граф, що спрощено відбиває її топологію (рис. 4.1).

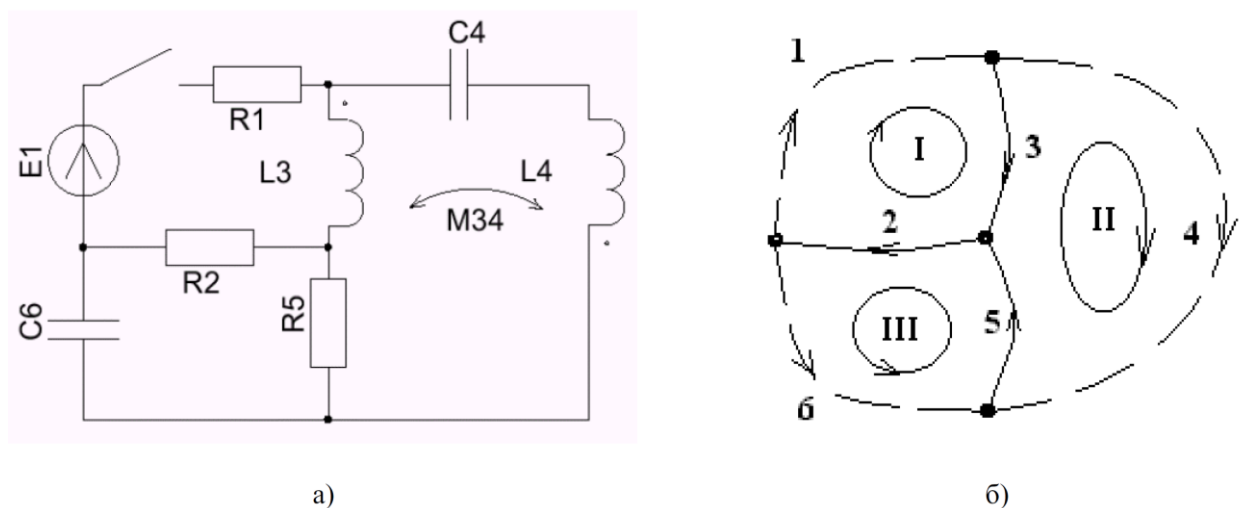


Рисунок 4.1 – Приклад принципової електричної схеми (а) і відповідний їй направлений граф (б)

Для цього необхідно виділити на схемі і присвоїти власні імена n вузлам (А, В, С, D). Останній з вузлів слід умовно призначити *базовим*. Скласти дерево графа шляхом з'єднання виділених вузлів відповідно до початкової схеми необхідною кількістю гілок ($n-1$ суцільна лінія) так, щоб всі наявні вузли були пов'язані між собою, проте не було утворено жодного замкненого контуру. Фрагмент графа (гілки 2-3-5), що утворився, носить назву "дерева". Інші гілки (1-4-6) називаються "хордами" і зображуються пунктирними лініями. Усім гілкам (і гілкам дерева, і хордам) слід задати довільні напрями, які умовно відповідні позитивному напрямку струмів в цих гілках. Приєднання будь-якої з хорд до дерева графа призводить до утворення замкненого незалежного контуру. Напрямок контуру умовно вважається таким же, як і у відповідній хорди. Всього може бути утворено $p - (n - 1)$ незалежних контурів (p - кількість гілок схеми). Контури, що

утворюються, мають бути показані на графі і пронумеровані римськими цифрами.

3. Скласти масиви, що відображають топологію заданої схеми - матрицю з'єднань Π і матрицю контурів Γ .

Матриця з'єднань Π має розмірність $(n-1) * p$. Кількість і номери стовпців відповідає кількості і номерам гілок схеми, кількість і імена рядків відповідають кількості і іменам вузлів схеми за винятком базового. Елементи матриці можуть набувати значень з множини $(-1, 0, 1)$. При цьому "1" відповідає випадку, коли гілка входить у відповідний вузол; "-1" - якщо гілка виходить з вузла; "0" - якщо гілка не сполучається з цим вузлом.

Матриця контурів Γ має розмірність $p * (p-n+1)$. Кількість і номери стовпців відповідають кількості і номерам незалежних контурів схеми, кількість і номери рядків відповідають кількості і номерам гілок схеми. Елементи матриці можуть набувати значень з множини $(-1, 0, 1)$. При цьому "1" відповідає випадку, коли напрям гілки співпадає з напрямом цього контуру; "-1" - якщо напрям гілки і напрям обходу контуру протилежні; "0" - якщо гілка не входить до складу цього контуру.

4. Скласти масиви, що відображають електричні характеристики заданої схеми, - матриці активних опорів R , індуктивностей L , ємностей C , а також матрицю комплексних опорів гілок Z і вектори ЕРС гілок E і вузлових джерел струму J .

Матриці R , L , C і Z мають розмірність $(p * p)$. Кількість і номери рядків і стовпців відповідає кількості і номерам гілок схеми. Елементом матриць R , L , C , що знаходяться на головній діагоналі, привласнюють значення, які відповідають характеристикам цієї гілки (опору, індуктивності, ємності). Елементи матриць R , C , що знаходяться на інших позиціях, прирівнюються до 0. Для матриці індуктивностей L елементам, що знаходяться на недіагональних позиціях, привласнюється значення, які відповідають взаємній індуктивності між гілками, номери яких відповідають номерам рядка і стовпця цього елемента. Знак недіагональних елементів визначається напрямом відповідної гілки графа по відношенню до початку котушки індуктивності (який визначається точкою у одного з кінців відповідного елемента). При збігу напрямів - знак взаємної індуктивності позитивний. При різних напрямках - знак негативний. Елементи матриці Z комплексних опорів відповідних гілок можуть бути обчислені наступним чином:

$$Z_{k,m} := R_{k,m} + j \cdot \omega \cdot L_{k,m} + \left\{ \begin{array}{l} \text{if } C_{k,m} \neq 0 \\ \quad \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_{k,m}} \\ \text{else} \\ \quad 0 \end{array} \right.$$

Перед обчисленням комплексного опору слід присвоїти константі j значення уявної одиниці.

Вектор джерел ЕРС гілок E має розмірність $p \times 1$ і містить в якості елементів значення ЕРС джерел, що знаходяться у відповідних гілках схеми. Знак елементу вектора визначається напрямом включення джерела по відношенню до вибраного на графі напрямку гілки. Якщо напрями збігаються - знак позитивний, при протилежних напрямках - негативний. Якщо в гілці джерело ЕРС відсутнє, то відповідному елементу вектора присвоюється нульове значення.

Вектор вузлових джерел струму J має розмірність $(n-1) \times 1$ і включає значення струмів, що входять або виходять з відповідних вузлів і обумовлені наявністю в цих вузлах джерел струму. Знак елементу вектора визначається напрямом струму по відношенню до вибраного вузла. Струм, що входить, має позитивний знак, що виходить, - негативний. Якщо до вузла джерело струму не підключене, то відповідному елементу вектора присвоюється нульове значення.

5. Скласти матричне співвідношення, що обчислює сталі комплексні значення струмів гілок досліджуваної схеми. За допомогою Mathcad вектор струмів гілок може бути обчислений таким чином:

$$I := (\text{stack}(\Gamma^T \cdot Z, II))^{-1} \cdot (\text{stack}(\Gamma^T \cdot E, -J))$$

де $\text{stack}(M1, M2, \dots)$ - функція програми Mathcad, що забезпечує створення матриці вищого порядку з матриць $M1, M2, \dots$ нижчого порядку.

6. Використовуючи матричну форму закону Ома (4.1), слід визначити вектор напруги гілок схеми.

7. Для перевірки правильності проведених обчислень необхідно визначити потужності в кожній гілці схеми, використовуючи рівняння балансу потужностей (4.5). Форма запису цього рівняння в системі Mathcad наступна:

$$S := \text{diag}(\overline{U}) \cdot I$$

де $\text{diag}(V)$ - оператор, що створює діагональну матрицю з елементів вектора V .

Риска над вектором означає отримання вектора, комплексно-спряженого до початкового.

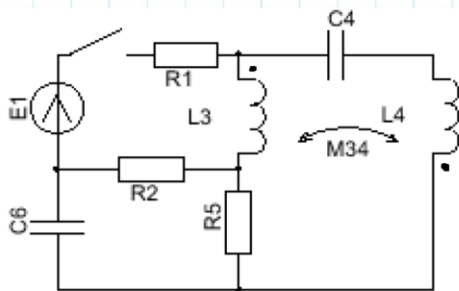
8. Доповнити розрахунки текстовими коментарями, що пояснюють виконані дії.

Приклад Mathcad-документа, в якому виконується моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола, наведено на рис. 4.2-4.4.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола

Вихідні дані:



Принципова електрична схема

$$R1 := 10 \quad E1 := 220$$

- параметри елементів 1-ї гілки

$$R2 := 20$$

- параметри елементів 2-ї гілки

$$L3 := 0.25$$

- параметри елементів 3-ї гілки

$$L4 := 0.35 \quad C4 := 10 \cdot 10^{-6}$$

- параметри елементів 4-ї гілки

$$R5 := 10$$

- параметри елементів 5-ї гілки

$$C6 := 20 \cdot 10^{-6}$$

- параметри елементів 6-ї гілки

$$M34 := 0.3$$

- взаємні індуктивності

$$\omega := 314$$

Граф і дерево:

Топологічні матриці:

Матриця з'єднань:

$$I := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця контурів:

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

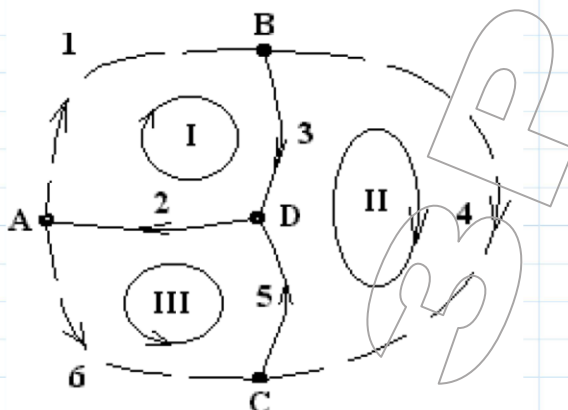


Рисунок 4.2 – Приклад моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола

Електричні характеристики гілок схеми:

$$j := \sqrt{-1}$$

$$R := \begin{bmatrix} R1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- матриця активних опорів

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L3 & -M34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M34 & L4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- матриця індуктивностей

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C6 \end{bmatrix}$$

- матриця ємностей

$$k := 0..5$$

$$m := 0..5$$

$$Z_{k,m} := R_{k,m} + j \cdot \omega \cdot L_{k,m} + \left\| \begin{array}{l} \text{if } C_{k,m} \neq 0 \\ \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_{k,m}} \\ \text{else} \\ 0 \end{array} \right\|$$

- матриця комплексних опорів

$$Z = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 78.5i & -94.2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -94.2i & -208.571i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -159.236i \end{bmatrix}$$

$$E := [E1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- вектор ЕРС гілок

$$J := [0 \ 0 \ 0]^T$$

- вектор джерел струму

Рисунок 4.3 – Приклад моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола

Розрахунок усталених значень струмів та напруг:

$$I := (\text{stack}(\Gamma^T \cdot Z, \Pi))^{-1} \cdot (\text{stack}(\Gamma^T \cdot E, -J))$$

- вектор усталених значень струмів гілок

$$I = \begin{bmatrix} 0.126 + 0.474i \\ 0.267 + 0.423i \\ -0.008 - 0.977i \\ 0.134 + 1.451i \\ 0.275 + 1.4i \\ 0.141 - 0.051i \end{bmatrix} \quad \overline{I} = \begin{bmatrix} 0.491 \\ 0.501 \\ 0.977 \\ 1.457 \\ 1.427 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

$$U := E - Z \cdot I$$

- вектор усталених значень напруг гілок

$$U = \begin{bmatrix} 218.737 - 4.742i \\ -5.348 - 8.467i \\ -213.389 + 13.209i \\ -210.639 + 27.212i \\ -2.75 - 14.003i \\ 8.098 + 22.47i \end{bmatrix} \quad \overline{U} = \begin{bmatrix} 218.788 \\ 10.014 \\ 213.797 \\ 212.389 \\ 14.27 \\ 23.884 \end{bmatrix}$$

$$S := \text{diag}(\overline{U}) \cdot I$$

- розрахунок потужностей гілок для перевірки

$$S = \begin{bmatrix} 25.379 + 104.323i \\ -5.014 \\ -11.285 + 208.571i \\ 11.285 - 309.311i \\ -20.364 \\ -3.583i \end{bmatrix}$$

$$\sum S = 7.07 \cdot 10^{-13} + 3.229i \cdot 10^{-13}$$

Рисунок 4.4 – Приклад моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Вихідні дані відповідно до варіанту з табл. 4.1.
3. Mathcad-документ, в якому виконується моделювання усталеного режиму лінійного електричного кола.
4. Висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається графом?
2. Що називається дугою графа?
3. Як визначається матриця з'єднань?
4. Як визначається матриця контурів?
5. Скільки вузлів та дуг має граф, якщо скорочена матриця з'єднань має вигляд:

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Скільки дуг та незалежних контурів має граф, матриця контурів для якого є наступною:

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Як називають матрицю, яка описує з'єднання дуг графа з незалежними вузлами?
8. Як називається матриця, яка описує з'єднання дуг графа в незалежні контури?
9. Як називають контур, для якого рівняння за другим законом Кірхгофа не може бути отримано у вигляді лінійної комбінації з рівнянь інших контурів?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Моделювання перехідних процесів в одномасовому лінійному електромеханічному перетворювачі

Мета: дослідити поведінку одномасового електромеханічного перетворювача з лінійною механічною характеристикою при незмінному керуючому впливі.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Поведінка одномасового електромеханічного перетворювача (ЕМП) при постійності моменту інерції описується наступним диференціальним рівнянням:

$$J_{\Sigma} \cdot \frac{d\omega}{dt} = M - M_c, \quad (5.1)$$

де J - сумарний момент інерції, приведений до валу двигуна, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

M - момент, що створюється двигуном, $\text{Н} \cdot \text{м}$;

M_c - статичний момент опору на валу двигуна, $\text{Н} \cdot \text{м}$;

ω - кутова частота обертання, приведена до валу двигуна, с^{-1} .

У більшості практичних випадків вимагається враховувати наявність електромеханічного зв'язку між механічними координатами, який описується механічною характеристикою (МХ) двигуна. При роботі на ділянці, що лежить біля номінального режиму, практично будь-яку характеристику можна представити фрагментом прямої лінії. МХ двигуна в цьому випадку описується лінійною залежністю:

$$M = \beta \cdot (\omega_0 - \omega), \quad (5.2)$$

де ω_0 - частота обертання в режимі холостого ходу, с^{-1} ;

β - жорсткість МХ, що визначає її нахил по відношенню до осі моментів (чим більше β , тим жорсткіша МХ, тобто тим сильніша реакція двигуна на зміни частоти обертання, викликані зовнішніми збуреннями), $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Характер статичного навантаження на валу двигуна, визначає величину моменту опору M_c , що фігурує в рівнянні (5.1). Вказаний момент може бути *активним* – створюватися зовнішніми по відношенню до ЕМП джерелами енергії (знак і величина моменту не залежать від частоти обертання), і *реактивним* – виникає як реакція робочого органу ЕМП на активний момент двигуна (знак і (чи) величина моменту залежать від частоти обертання). При розрахунках і моделюванні ЕМП оперують МХ механізму - залежністю моменту опору від частоти обертання. Основні з існуючих залежностей приведені в табл. 5.1.

Рівняння (5.1), (5.2) і співвідношення з табл. 5.1, яке відповідає типу навантаження, є математичною моделлю механічної системи, що складається з електродвигуна і робочої машини при нескінченно великій жорсткості механічного зв'язку між ними.

Таблиця 5.1

Аналітичні залежності статичних навантажень

№	Найменування	Тип навантаження	Залежність
1	Момент, що створюється вагою вантажу, який підіймається (опускається)	активне	$M_c = M_{cm}$
2	Момент сухого тертя	реактивне	$M_c = M_{cm} \cdot \text{sign}(\omega)$
3	Момент в'язкого тертя	реактивне	$M_c = k \cdot \omega$
4	Момент різання	реактивне	$M_c = \begin{cases} M_{cm}, & \text{при } \omega > 0 \\ 0, & \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$
5	Момент вентиляторний	реактивне	$M_c = k \cdot \omega^2 \cdot \text{sign}(\omega)$

Якщо підставити залежність (5.2) і відповідне рівняння з табл. 5.1 в диференційне рівняння (5.1), можна отримати диференційне рівняння першого порядку, яке є ще одним з варіантів математичної моделі динаміки і статички ЕМП:

$$T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_0 - \frac{M_c(t, \varphi, \omega)}{\beta}, \quad (5.3)$$

де $T_m = J_\Sigma / \beta$ - електромеханічна стала часу, с;

$M_c(t, \varphi, \omega)$ - функціональна залежність статичного моменту опору від часу, кута повороту або частоти обертання, Н·м.

При розв'язанні диференційного рівняння чисельним методом, останнє необхідно представити у формі Коши:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{T_m} \cdot \left[\omega_0 - \frac{M_c(t, \varphi, \omega)}{\beta} - \omega \right]. \quad (5.4)$$

Для отримання результату, що характеризується прийнятною точністю, важливо правильно вибрати крок інтегрування (Δt , величина якого визначається найменшою сталою часу, в даному випадку T_m). З метою зниження об'єму обчислень доцільно керуватися співвідношенням:

$$\Delta t = (0,01 \dots 0,05) \cdot T_m. \quad (1.5)$$

ЗАВДАННЯ

1. По номеру варіанта вибрати з табл. 5.2 початкові дані.
2. Скласти диференційне рівняння одномасового лінійного електромеханічного перетворювача.
3. Визначити параметри моделі і крок моделювання.
4. У пакеті Mathcad здійснити моделювання перехідного процесу включення двигуна ЕМП при заданих початкових умовах $\omega(t_0) = \omega_{st}$ і заданому характері статичного навантаження $M_c(t, \varphi, \omega)$.
5. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи.

Таблиця 5.2

Початкові дані для моделювання

№	β , Н·м·с	J, кг·м ²	ω_0 , с ⁻¹	ω_{st} , с ⁻¹	$M_c(t, \omega)$, Н·м	t_{end} , с
1	5,1	0,8	50	0	$\begin{cases} 100, \text{ при } t < 0.7 \\ 200, \text{ при } t \geq 0.7 \end{cases}$	1,21
2	1,2	0,32	20	-10	$\begin{cases} 10, \text{ при } \omega > 0 \\ -10, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,82
3	1,8	0,25	60	-50	$1.5 \cdot \omega$	0,63
4	5,1	0,22	60	-45	$\begin{cases} 100, \text{ при } \omega > 0 \\ 0, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,34
5	1,7	0,31	50	-20	$\begin{cases} 0.1 \cdot \omega^2, \text{ при } \omega > 0 \\ -0.1 \cdot \omega^2, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,4
6	4,6	0,5	30	0	$2.5 \cdot \omega$	0,72
7	2,1	0,2	-20	10	$\begin{cases} 20, \text{ при } \omega > 0 \\ -20, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,53
8	12,5	0,5	70	0	$\begin{cases} 200, \text{ при } t < 0.3 \\ 0, \text{ при } t \geq 0.3 \end{cases}$	0,51
9	2,4	0,22	70	0	$\begin{cases} 0.012 \cdot \omega^2, \text{ при } \omega > 0 \\ -0.012 \cdot \omega^2, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,35
10	1,1	0,12	40	-30	$\begin{cases} 20, \text{ при } \omega > 0 \\ 0, \text{ при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,35

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

При використанні математичного пакету Mathcad для моделювання поведінки ЕМП слід дотримуватися наступного.

1. На початку Mathcad-документа мають бути представлені початкові дані. Слід пам'ятати, що програма Mathcad обробляє дані і математичні вирази зліва направо і зверху вниз.

2. Після початкових даних необхідно представити співвідношення для обчислення допоміжних параметрів, зокрема - сталої часу T_m .

3. Початкова інформація, що відноситься до моменту опору на валу двигуна, має бути представлена у вигляді рівняння зв'язку, яке описує залежність величини моменту або від часу $M_c(t)$, або від частоти обертання $M_c(\omega)$.

4. Скласти і записати у формі Коши диференціальне рівняння, що моделює механічні процеси в досліджуваній ЕМП. Необхідно чітко дотримувати

форму запису, прийнятої в Mathcad, наприклад, при реактивному навантаженні:

$$D(t, \omega) := \frac{1}{T_M} \cdot \left[\omega_0 - \frac{M_c(\omega)}{\beta} - \omega \right]. \quad (5.6)$$

5. Нижче вказати межі діапазону інтегрування - інтервал часу, упродовж якого необхідно промодельовати поведінку ЕМП. Слід ввести початкове і кінцеве значення (наприклад, $t_{st}:=0$, $t_{end}:=1$). Використовуючи співвідношення (5.5), визначити кроком інтегрування Δt . Знаючи величину цього параметра, слідує на підставі співвідношення (5.7) обчислити необхідну кількість кроків:

$$N = \frac{t_{end} - t_{st}}{\Delta t}. \quad (5.7)$$

6. Вказати початкове значення частоти обертання, що відповідає моменту t_{st} . Слід мати на увазі, функція Rkadapt здатна розв'язувати як єдине рівняння, так і декілька рівнянь у складі єдиної системи. Відповідно, форма представлення початкових умов залежить від кількості рівнянь у системі, що розв'язується. У випадку одного рівняння початкова умова вказується в скалярній формі. При вищому порядку системи рівнянь початкові умови вказуються у вигляді вектора відповідної розмірності.

7. Функція, що розв'язує диференційне рівняння, записується наступним чином:

$$S := \text{Rkadapt}(\omega_{st}, t_{st}, t_{end}, N, D). \quad (5.8)$$

Введення функції Rkadapt може бути здійснене або з використанням майстра функцій, або вручну, з клавіатури. Параметри мають бути вказані саме в такому порядку. Для розв'язання диференційного рівняння може бути використана альтернативна функція rkfixed, порядок роботи і форма звернення до якої не відрізняється від наведеного вище. Основна відмінність полягає в тому, що rkfixed при розв'язанні диференційного рівняння оперує постійним кроком інтегрування, а у функції Rkadapt крок підлаштовується під інтенсивність зміни функції, завдяки чому досягається вища точність розв'язку. Обидві функції повертають масив S розмірністю $N \cdot (n+1)$, де N - кількість кроків інтегрування, а n - кількість диференційних рівнянь у системі. В даному випадку система складається з одного диференційного рівняння, тому $n = 2$, причому перший стовпчик є вектором поточного часу, а другий - вектором поточних результатів розв'язку упродовж інтервалу інтегрування.

8. Для зручності представлення результатів слід виділити з масиву S вектори часу і частоти обертання. Ця операція здійснюється за допомогою використання оператора $M^{(\cdot)}$, що входить до складу панелі матричних операторів.

9. Використовуючи рівняння зв'язку (5.2), визначити вектор значень моменту на валу.

10. Аналогічним чином, використовуючи рівняння зв'язку моменту опору з частотою обертання або часом, визначити вектор значень статичного моменту на валу двигуна.

11. Використовуючи панель побудови графіків, здійснити виведення результатів розв'язання диференційного рівняння та рівняння зв'язку на двовірний графік. При цьому для отримання залежностей моменту і частоти обертання від часу вектори ω , M і M_c мають бути представлені на осі ординат, а вектор t - на осі абсцис. При побудові механічної характеристики по осі ординат вказується частота обертання, а по осі абсцис - момент.

12. Доповнити розрахунки текстовими коментарями, що пояснюють сутність виконаних дій.

Приклад Mathcad-документа, в якому виконується моделювання механічних перехідних процесів в одномасовому лінійному електромеханічному перетворювачі, наведено на рис. 5.1, 5.2.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи.
2. Номер варіанта і вихідні дані.
3. Mathcad - документ, який містить диференційне рівняння і рівняння зв'язку, що описують механічні процеси в одномасовому електромеханічному перетворювачі з лінійною механічною характеристикою під час запуску.
4. Графіки, що ілюструють залежність частоти обертання і моменту на валу двигуна від часу, а також механічні характеристики системи, отримані при моделюванні в системі Mathcad.
5. Висновки з аналізом отриманих результатів моделювання.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Наведіть основне рівняння динаміки одномасової електромеханічної системи.
2. Яка механічна характеристика називається абсолютно жорсткою?
3. В якому випадку механічна характеристика має позитивну жорсткість?
4. Що позначає величина J в основному рівнянні динаміки електропривода $J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c$?
5. Який вигляд має рівняння руху електроприводу в загальному випадку?
6. Яке співвідношення існує в усталеному режимі роботи електроприводу між електромагнітним моментом двигуна і моментом опору механізму?

Лабораторна робота №5

Моделювання механічних перехідних процесів в одномасовому лінійному електромеханічному перетворювачі

Вихідні дані:

- $\beta := 3.185$ - жорсткість механічної характеристики
- $\omega_0 := 157$ - частота обертання холостого ходу
- $J := 0.3$ - сумарний момент інерції мас, що обертаються

Проміжні дані:

- $T_m := \frac{J}{\beta} = 0.094$ - електромеханічна стала часу

Допоміжне рівняння зв'язку:

- $Mc(t) := \begin{cases} 100 & \text{if } t < 0.5 \\ 200 & \text{else} \end{cases}$ - статичний момент опору

Диференційне рівняння стану:

- $D(t, \omega) := \frac{1}{T_m} \cdot \left(\omega_0 - \frac{Mc(t)}{\beta} - \omega \right)$ - диференційне рівняння в формі Коши

Початкові умови:

- $tst := 0$ - початок інтервалу моделювання
- $tend := 1$ - кінець інтервалу моделювання
- $\omega st := 200$ - початкове значення частоти обертання
- $\Delta t := 0.1 \cdot T_m = 0.009$ - крок моделювання
- $N := \text{floor} \left(\frac{tend - tst}{\Delta t} \right) = 106$ - кількість кроків моделювання

Розв'язання диференційного рівняння стану:

- $S := \text{Rkadapt}(\omega st, tst, tend, N, D)$

Рисунок 5.1 – Приклад Mathcad-документа

Результати моделювання:

$t := S^{(0)}$ - вектор відліків часу

$\omega := S^{(1)}$ - вектор значень частоти обертання

$M := \beta \cdot (\omega_0 - \omega)$ - розрахунок вектора значень моменту двигуна

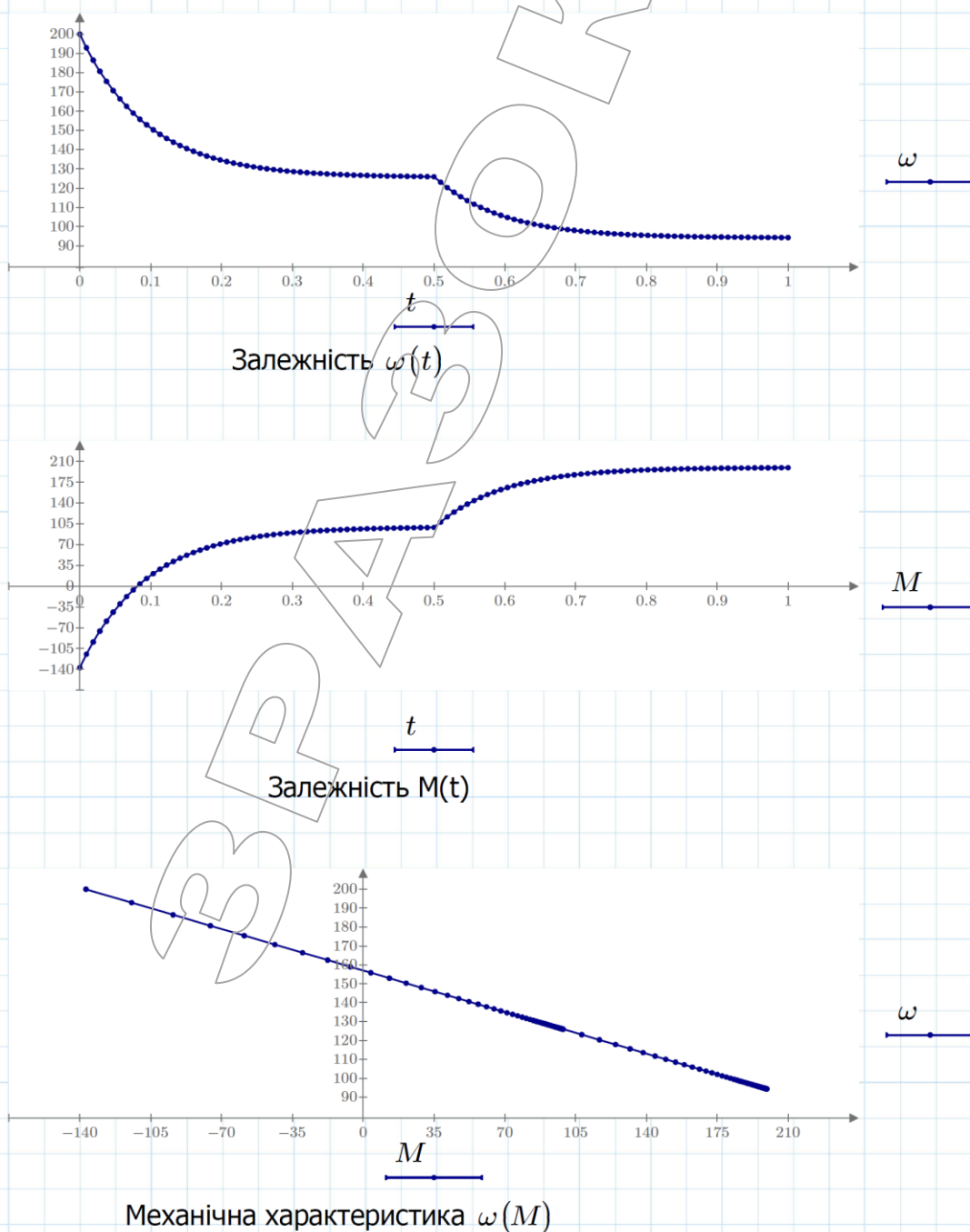


Рисунок 5.2 – Приклад Mathcad-документа

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі

Мета: розробити математичну модель двомасової електромеханічної системи при різних керуючих впливах та збуреннях.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Поведінка двомасової електромеханічної системи (ЕМС) описується наступними математичними співвідношеннями. Наявність механічного зв'язку, що характеризується скінченною жорсткістю, між двома масами системи обумовлює появу сил пружної взаємодії між ними. Після диференціювання початкового рівняння, що складається за законом Гука, отримаємо:

$$\frac{dM_{12}}{dt} = c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (6.1)$$

де ω_1, ω_2 - частоти обертання першої і другої мас;

c_{12} - коефіцієнт жорсткості пружного механічного зв'язку між масами;

M_{12} - сила пружності.

Для кожної маси, що входить в систему, справедливі рівняння рівноваги сил, які за відсутності зовнішніх дій на проміжні маси системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= M - M_{12}; \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= M_{12} - M_c(t, \varphi_2, \omega_2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

де J_1, J_2 - моменти інерції першої і другої мас;

M - момент, що розвивається двигуном, що входить до складу першої маси;

$M_c(t, \varphi_2, \omega_2)$ - статичний момент опору, що впливає на другу масу системи.

Електромеханічний зв'язок між механічними координатами першої маси, до складу якої входить електромеханічний перетворювач (двигун), описується співвідношенням.

$$M = \beta (\varphi_0 - \varphi_1), \quad (6.3)$$

де β - жорсткість механічної характеристики двигуна;

ω_0 - частота обертання холостого ходу.

Вплив механічного навантаження враховується залежністю $M_c(t, \varphi_2, \omega_2)$ статичного моменту опору, що впливає на другу масу, від часу, частоти обертання або кута повороту.

Таким чином, повний математичний опис двомасової ЕМС буде представлено трьома диференційними рівняннями (6.1) - (6.2) і двома рівняннями зв'язку.

Для формалізації розв'язання рівнянь моделі можуть бути використані матричні методи. Для двомасової ЕМС матрична форма запису рівнянь

математичної моделі у формі Коши, призначеної для розв'язання чисельними методами, має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(t), \quad (6.4)$$

де $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ M_{12}(t) \end{bmatrix}$ - вектор змінних, таких, що описують стан ЕМС;

$\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} \omega_0(t) \\ M_c(t, \varphi_2, \omega_2) \end{bmatrix}$ - вектор відомих зовнішніх впливів на ЕМС;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\beta/J_1 & 0 & -1/J_1 \\ 0 & 0 & 1/J_2 \\ c_{12} & -c_{12} & 0 \end{bmatrix}$ - матричний коефіцієнт при змінних стану;

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta/J_1 & 0 \\ 0 & -1/J_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - матричний коефіцієнт при векторі зовнішніх впливів.

При чисельному розв'язанні рівняння (6.4) для отримання результату, що характеризується прийнятною точністю, слід правильно вибрати крок інтегрування (Δt , величина якого визначається найменшою сталою часу T_{\min} . Доцільно при виборі кроку інтеграції керуватися співвідношенням (6.5):

$$\Delta t = (0,01 \dots 0,05) \cdot T_{\min}. \quad (6.5)$$

T_{\min} визначається як мінімальна величина з двох сталих часу T_{m1} , T_{m2} , причому:

$T_{m1} = (J_1 + J_2) / \beta$ – стала часу аперіодичної складової перехідного процесу в двомасовій системі;

$T_{m2} \approx 2\pi \sqrt{J_1 J_2 / c_{12} (J_1 + J_2)}$ - період коливальної складової перехідного процесу в двомасовій системі.

ЗАВДАННЯ

1. По номеру варіанта вибрати з табл. 6.1 початкові дані для моделювання.
2. Скласти диференційні рівняння та рівняння зв'язку двомасової ЕМС.
3. Визначити параметри моделі і крок моделювання.
4. У пакеті Mathcad здійснити моделювання перехідного процесу включення двигуна ЕМП при заданих початкових умовах $\omega(t_0) = \omega_{st}$ і заданому характері статичного навантаження $M_c(t, \varphi_2, \omega_2)$.
5. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи.

Таблиця 6.1

Початкові дані для моделювання

№	β , Н·м·с	J_1 , кг·м ²	J_2 , кг·м ²	c_{12} , Н·м/рад	ω_0 , с ⁻¹	ω_{st} , с ⁻¹	$M_c(t, \omega)$, Н·м	t_{end} , с
1	5,1	0,2	0,6	500	50	0	$\begin{cases} 100, \text{при } t < 0.7 \\ 200, \text{при } t \geq 0.7 \end{cases}$	1,21
2	1,2	0,06	0,26	300	20	-10	$\begin{cases} 10, \text{при } \omega > 0 \\ -10, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,82
3	1,8	0,08	0,17	350	60	-50	$1.5 \cdot \omega$	0,63
4	5,1	0,08	0,14	550	60	-45	$\begin{cases} 100, \text{при } \omega > 0 \\ 0, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,34
5	1,7	0,06	0,25	640	50	-20	$\begin{cases} 0.1 \cdot \omega^2, \text{при } \omega > 0 \\ -0.1 \cdot \omega^2, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,4
6	4,6	0,19	0,31	600	30	0	$2.5 \cdot \omega$	0,72
7	2,1	0,07	0,13	400	-20	10	$\begin{cases} 20, \text{при } \omega > 0 \\ -20, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,53
8	12,5	0,2	0,3	700	70	0	$\begin{cases} 200, \text{при } t < 0.3 \\ 0, \text{при } t \geq 0.3 \end{cases}$	0,51
9	2,4	0,06	0,14	750	70	0	$\begin{cases} 0.012 \cdot \omega^2, \text{при } \omega > 0 \\ -0.012 \cdot \omega^2, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,35
10	1,1	0,03	0,09	450	40	-30	$\begin{cases} 20, \text{при } \omega > 0 \\ 0, \text{при } \omega \leq 0 \end{cases}$	0,35

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Приклад Mathcad-документа, в якому виконується моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі, наведено на рис. 6.1-6.3.

1. На початку Mathcad - документа мають бути представлені початкові дані.

2. Початкова інформація, що відноситься до моменту опору на валу двигуна, має бути представлена у вигляді рівняння зв'язку, що описує залежність величини моменту або від часу, або від частоти обертання другої маси.

Оскільки диференціальні рівняння двомасової ЕМС складаються і розв'язуються у векторно-матричній формі, змінні стану являють собою вектор X , до складу якого входять частоти обертання першої і другої мас ω_1 , ω_2 , а також момент пружної взаємодії між ними M_{12} . Відповідно ці величини можуть бути виражені як елементи вектора X - X_0 , X_1 , X_2 . У разі реактивного навантаження залежність статичного моменту має вигляд:

$$M_c(X)=f(X_1), \quad (6.5)$$

де $f(X_1)$ - залежність, що визначається типом реактивного навантаження (вентиляторне, сухого тертя, в'язкого тертя тощо).

3. Підготувати дані для запису диференціальних рівнянь у векторно-матричній формі. Для цього необхідно скласти:

- матричний коефіцієнт A при змінних стану розмірністю (3×3) ;
- матричний коефіцієнт B , що відноситься до вектора зовнішніх впливів, розмірністю (3×3) ;
- вектор V зовнішніх впливів розмірністю (1×2) , що включає частоту обертання холостого ходу ω_0 (керуючий вплив) і статичний момент опору $M_c(t, \varphi_2, \omega_2)$ (збурення).

Окрім цього слід врахувати, що вектор зовнішніх впливів V вказується як функція від наступних змінних:

- $V(t)$ - якщо навантаження на валу активне і змінюється з часом, або у тому випадку, коли частота обертання холостого ходу задається залежністю $\omega_0(t)$;
- $V(X)$ - якщо навантаження на валу реактивне (залежить від частоти обертання другої маси);
- $V(t, X)$ - якщо навантаження на валу реактивне, а частота обертання холостого ходу задається залежністю $\omega_0(t)$;
- V - якщо усі зовнішні впливи - константи (не залежать ні від часу, ні від частоти обертання).

4. Скласти і записати у формі Коши матричне диференціальне рівняння, що моделює механічні процеси в досліджуваній ЕМС:

$$D(t, X) := A \cdot X + B \cdot V(t) \quad (6.6)$$

5. Нижче вказати межі діапазону інтегрування - інтервал часу, упродовж якого необхідно здійснити моделювання поведінки ЕМС. Слід ввести початкове і кінцеве значення (наприклад, $tst:=0$, $tend:=1$). Визначити крок інтегрування Δt необхідну кількість N кроків інтегрування.

6. Вказати вектор початкових умов X_{st} , що має розмірність (1×3) . В якості перших двох елементів цього вектора необхідно вказати початкову частоту обертання елементів системи ω_{st} . Початковий момент пружності, що є третім елементом вказаного вектора, прийняти рівним нулю.

7. Записати функцію для чисельного розв'язання диференціального рівняння стану:

$$S := \text{rkfixed}(X_{st}, tst, tend, N, D)$$

Результатом розв'язання є масив S розмірністю $N \times 4$, причому перший стовпчик є вектором відліків часу, другий - вектор поточних значень частоти обертання першої маси, третій - вектор поточних значень частоти обертання другої маси, а четвертий - вектор поточних значень моменту пружності.

8. Для зручності представлення результатів рішення слід виділити з масиву S вектори часу і змінних стану.

Лабораторна робота №6

Моделювання перехідних процесів в двохмасовій електромеханічній системі

Вихідні дані:

$\beta := 3.185$	- жорсткість механічної характеристики
$\omega_0 := 157$	- частота обертання холостого ходу
$J_1 := 0.15$	- момент інерції першої маси
$J_2 := 0.15$	- момент інерції другої маси
$c_{12} := 500$	- жорсткість зв'язку

Допоміжне рівняння зв'язку:

$M_c(t) := \begin{cases} 100 & \text{if } t < 1.5 \\ 200 & \text{else} \end{cases}$	- статичний момент опору
---	--------------------------

Проміжні рівняння:

$$T_{m1} := \frac{J_1 + J_2}{\beta} = 0.094 \quad \text{- перша стала часу}$$

$$T_{m2} := \sqrt{\frac{J_1 \cdot J_2}{c_{12} \cdot (J_1 + J_2)}} \cdot 2 \cdot \pi = 0.077 \quad \text{- друга стала часу}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{J_1} & 0 & \frac{-1}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} \\ c_{12} & -c_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.233 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 6.667 \\ 500 & -500 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{- матричний коефіцієнт A}$$

$$V(t) := \begin{bmatrix} \omega_0 \\ M_c(t) \end{bmatrix} \quad \text{- вектор зовнішніх впливів}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{\beta}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{- матричний коефіцієнт B}$$

Рисунок 6.1 - Приклад Mathcad-документа для моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі

Диференційне рівняння стану:

$$D(t, X) := A \cdot X + B \cdot V(t)$$

- диференційне рівняння в формі Коши

Початкові умови:

$$tst := 0$$

- початок інтервала моделювання

$$tend := 1$$

- кінець інтервала моделювання

$$Xst := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- вектор початкових значень змінних стану

$$\Delta t := 0.1 \cdot \min(Tm1, Tm2) = 0.008$$

- крок моделювання

$$N := \text{floor} \left(\frac{tend - tst}{\Delta t} \right) = 129$$

- кількість кроків моделювання

Розв'язання матричного диференційного рівняння стану:

$$S := \text{rkfixed}(Xst, tst, tend, N, D)$$

Результати моделювання:

$$t := S^{(0)}$$

- вектор відліків модельного часу

$$\omega 1 := S^{(1)}$$

- вектор поточної частоти обертання першої маси

$$\omega 2 := S^{(2)}$$

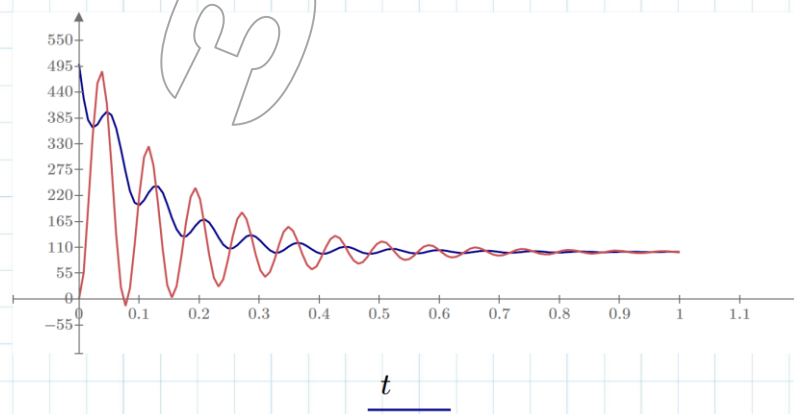
- вектор поточної частоти обертання другої маси

$$M12 := S^{(3)}$$

- вектор поточних значень моменту пружності

$$M := \beta \cdot (\omega 0 - \omega 1)$$

- вектор поточних значень моменту двигуна



Графіки залежностей $M(t)$, $M12(t)$

Рисунок 6.2 - Приклад Mathcad-документа для моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі

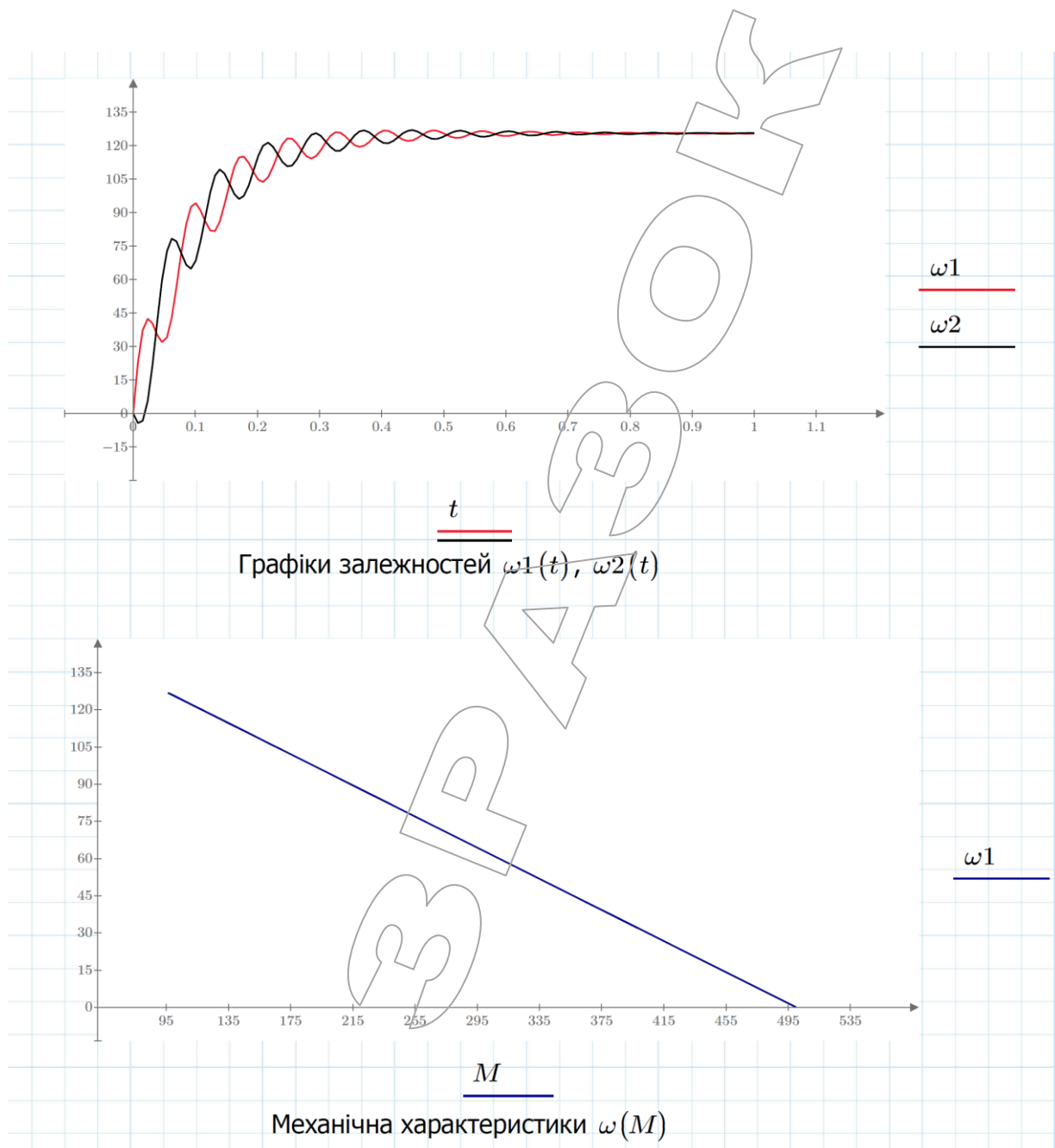


Рисунок 6.3 - Приклад Mathcad-документа для моделювання перехідних процесів в двомасовій електромеханічній системі

9. Використовуючи рівняння (6.3), визначити вектор значень моменту на валу.

10. Використовуючи панель побудови графіків, здійснити виведення результатів на двовірні графіки. При цьому для отримання залежностей моментів і частот обертання від часу вектори ω_1 , ω_2 , M_{12} , M мають бути представлений на осі ординат, а вектор t - на осі абсцис. При побудові механічної характеристики по осі ординат вказується частота обертання, а по осі абсцис - момент.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема і мета роботи.
2. Номер варіанта і вихідні дані.
3. Mathcad-документ, який містить математичну модель двомасової електромеханічної системи для випадку некерованого запуску ЕМС.
4. Графіки, що ілюструють залежності частот обертання окремих мас ЕМС, пружного моменту і моменту на валу двигуна від часу, а також механічні характеристики системи, отримані при моделюванні в системі Mathcad.
5. Висновки з аналізом результатів моделювання.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Яким чином момент інерції механізму впливає на час розгону електроприводу?
2. Які диференціальні рівняння описують двомасову електромеханічну систему?
3. Від чого може залежати статичний момент опору на валу двигуна?
4. Які типи моментів опору Вам відомі?
5. Які функції використовуються у пакеті Mathcad для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь?
6. Яке призначення функцій `rkfixed`, `Rkadapt` ?
7. Наведіть приклади систем, що можуть бути описані як двомасові електромеханічні.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Моделювання перехідного процесу пуску асинхронного двигуна

Мета: оволодіти методикою чисельного розв'язання диференціальних рівнянь стану асинхронного двигуна.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Математичний опис асинхронної машини в ортогональній системі координат xu , що обертається відносно статора з частотою ω_k , представляється п'ятьма нелінійними рівняннями стану (чотири складаються на підставі 2-го закону Кірхгофа, і одне - на підставі 2-го закону Ньютона):

$$\begin{cases} U_{1x} = \Psi_{1x} \cdot \frac{L_2 R_1}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{2x} \cdot \frac{L_m R_1}{L_1 L_2 - L_m^2} + \frac{d\Psi_{1x}}{dt} - \omega_k \Psi_{1y}, \\ U_{1y} = \Psi_{1y} \cdot \frac{L_2 R_1}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{2y} \cdot \frac{L_m R_1}{L_1 L_2 - L_m^2} + \frac{d\Psi_{1y}}{dt} + \omega_k \Psi_{1x}, \\ U_{2x} = \Psi_{2x} \cdot \frac{L_1 R_2}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{1x} \cdot \frac{L_m R_2}{L_1 L_2 - L_m^2} + \frac{d\Psi_{2x}}{dt} - (\omega_k - \omega_r) \Psi_{2y}, \\ U_{2y} = \Psi_{2y} \cdot \frac{L_1 R_2}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{1y} \cdot \frac{L_m R_2}{L_1 L_2 - L_m^2} + \frac{d\Psi_{2y}}{dt} + (\omega_k - \omega_r) \Psi_{2x}, \\ \frac{1.5 p L_m}{L_1 L_2 - L_m^2} \cdot [\Psi_{1y} \Psi_{2x} - \Psi_{1x} \Psi_{2y}] - M_c = J \cdot \frac{d\omega_r}{dt}. \end{cases} \quad (7.1)$$

і п'ятьма рівняннями зв'язку (7.2):

$$\begin{cases} I_{1x} = \Psi_{1x} \cdot \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{2x} \cdot \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_m^2}, \\ I_{1y} = \Psi_{1y} \cdot \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{2y} \cdot \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_m^2}, \\ I_{2x} = \Psi_{2x} \cdot \frac{L_1}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{1x} \cdot \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_m^2}, \\ I_{2y} = \Psi_{2y} \cdot \frac{L_1}{L_1 L_2 - L_m^2} - \Psi_{1y} \cdot \frac{L_m}{L_1 L_2 - L_m^2}, \\ M = \frac{1.5 p L_m}{L_1 L_2 - L_m^2} \cdot [\Psi_{1y} \Psi_{2x} - \Psi_{1x} \Psi_{2y}]. \end{cases} \quad (7.2)$$

де $\mathbf{U}_1 = [U_{1x} \ U_{1y}]^T$, $\mathbf{U}_2 = [U_{2x} \ U_{2y}]^T$ - вектори напруги статора і ротора асинхронної машини і їх проекції на координатні осі;

$\mathbf{I}_1 = [I_{1x} \ I_{1y}]^T$, $\mathbf{I}_2 = [I_{2x} \ I_{2y}]^T$ - вектори струмів в обмотках статора і ротора і їх проекції на координатні осі;

$\Psi_1 = [\Psi_{1x} \ \Psi_{1y}]^T$, $\Psi_2 = [\Psi_{2x} \ \Psi_{2y}]^T$ - вектори потокозчеплень обмоток статора і ротора та їх проекції на координатні осі;

ω_r - частота обертання ротора;
 ω_k - частота обертання системи координат;
 M - електромагнітний момент АМ;
 M_c - статичний момент механічного навантаження на валу машини;
 p – кількість пар полюсів асинхронної машини;
 L_1, L_2, L_m - індуктивності обмоток статора, ротора і намагнічення;
 R_1, R_2 - опори обмоток статора та ротора;
 J - момент інерції мас, що обертаються, пов'язаних з ротором.

Величини $\Psi_{1x}, \Psi_{1y}, \Psi_{2x}, \Psi_{2y}, \omega_r$, що входять в систему рівнянь (7.1), надають повну інформацію про поведінку машини і є, відповідно, змінними стану цього об'єкту. Величини $I_{1x}, I_{1y}, I_{2x}, I_{2y}, M$, що визначаються системою рівнянь (7.2), є комплексом величин, що спостерігаються, вони визначаються на підставі рівнянь зв'язку. Інші величини, що фігурують у вказаних рівняннях, є або параметрами, що характеризують компоненти цієї динамічної системи, або зовнішніми впливами.

Математичний опис асинхронної машини в системі координат, що обертається із заданою частотою, може бути отриманий з рівнянь (7.1) - (7.2) шляхом підстановки в них значення частоти ω_k (наприклад, для випадку нерухомої системи координат, пов'язаної із статором, $\omega_k=0$).

Слід зазначити, що рівняння (7.1) - (7.2), які описують процеси в двофазній асинхронній машині, дозволяють отримати коректний результат тільки при дотриманні умов і обмежень, що використалися при їх виводі:

- симетрія фазних параметрів обмоток еквівалентної багатофазної машини;
- симетрія фазної напруги, що живить обмотки статора і ротора еквівалентної багатофазної машини;
- синусоїдний характер магнітного поля в проміжку між статором і ротором машини;
- відсутність ефектів насичення, гістерезису і вихрових струмів в магнітопроводі.

Недотримання будь-якої з вищезгаданих умов вимагає істотного доопрацювання моделі (наприклад, у разі несиметрії обмоток трифазної машини необхідно скласти рівняння в реальній, трифазній, системі координат).

Нелінійність і високий порядок системи диференціальних рівнянь практично унеможливають аналітичний розв'язок системи (7.1). Найбільш прийнятним варіантом є використання методів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь засобами обчислювальної техніки.

ЗАВДАННЯ

1. Відповідно до номеру варіанту обрати з табл. 7.1 вихідні дані.
2. Скласти рівняння асинхронної машини в нерухомій системі координат.

3. У пакеті Mathcad здійснити моделювання перехідного процесу пуску двигуна за нульових початкових умов і заданого характеру навантаження.

4. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи.

Таблиця 7.1

Вихідні дані для моделювання

№	Параметри асинхронного двигуна	Момент опору, Н·м
1	$R_1=0,219 \text{ Ом}, L_1=0,094 \text{ Гн}$ $R_2=0,211 \text{ Ом}, L_2=0,094 \text{ Гн}$ $L_m=0,092 \text{ Гн}, J=0,09 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=1$	$M_c = 0,1 \cdot \omega^2$
2	$R_1=152,9 \text{ Ом}, L_1=3,175 \text{ Гн}$ $R_2=192 \text{ Ом}, L_2=3,095 \text{ Гн}$ $L_m=2,66 \text{ Гн}, J=0,002 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,1$
3	$R_1=97,72 \text{ Ом}, L_1=2,046 \text{ Гн}$ $R_2=72,48 \text{ Ом}, L_2=2,155 \text{ Гн}$ $L_m=1,91 \text{ Гн}, J=0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,24$
4	$R_1=16,39 \text{ Ом}, L_1=0,663 \text{ Гн}$ $R_2=15,08 \text{ Ом}, L_2=0,7015 \text{ Гн}$ $L_m=0,624 \text{ Гн}, J=0,04 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,02 \cdot \omega$
5	$R_1=9,53 \text{ Ом}, L_1=0,484 \text{ Гн}$ $R_2=5,62 \text{ Ом}, L_2=0,476 \text{ Гн}$ $L_m=0,447 \text{ Гн}, J=0,07 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,001 \cdot \omega^2$
6	$R_1=1,32 \text{ Ом}, L_1=0,169 \text{ Гн}$ $R_2=0,922 \text{ Ом}, L_2=0,172 \text{ Гн}$ $L_m=0,164 \text{ Гн}, J=0,15 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 24$
7	$R_1=0,462 \text{ Ом}, L_1=0,0903 \text{ Гн}$ $R_2=0,312 \text{ Ом}, L_2=0,0916 \text{ Гн}$ $L_m=0,0876 \text{ Гн}, J=0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 15$
8	$R_1=0,16 \text{ Ом}, L_1=0,05 \text{ Гн}$ $R_2=0,078 \text{ Ом}, L_2=0,051 \text{ Гн}$ $L_m=0,0489 \text{ Гн}, J=0,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,5 \cdot \omega$
9	$R_1=0,091 \text{ Ом}, L_1=0,033 \text{ Гн}$ $R_2=0,045 \text{ Ом}, L_2=0,0334 \text{ Гн}$ $L_m=0,0322 \text{ Гн}, J=1,15 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,75 \cdot \omega$
10	$R_1=0,067 \text{ Ом}, L_1=0,0294 \text{ Гн}$ $R_2=0,032 \text{ Ом}, L_2=0,0297 \text{ Гн}$ $L_m=0,0287 \text{ Гн}, J=1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, p=2$	$M_c = 0,87 \cdot \omega^2$

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Змінними стану асинхронної машини є проекції потокозчеплень обмоток статора і ротора на координатні осі відповідної системи ($\Psi_{1x}, \Psi_{1y}, \Psi_{2x}, \Psi_{2y}$), що обертається з частотою ω_k , а також частота обертання ротора ω_r . Вказані змінні стани мають бути об'єднані в п'ятиелементний вектор \mathbf{X} , де $X_0=\Psi_{1x}, X_1=\Psi_{1y}, X_2=\Psi_{2x}, X_3=\Psi_{2y}, X_4=\omega_r$.

Окрім змінних стану визначенню підлягає ряд інших величин (проекції струмів обмоток, електромагнітний момент - п'ять величин). Їх обчислюють на підставі відповідних рівнянь зв'язку. Ці величини об'єднуються в п'ятиелементний вектор Y , який залежить від X (де $Y_0=I_{lx}$, $Y_1=I_{ly}$, $Y_2=I_{2x}$, $Y_3=I_{2y}$, $Y_4=M$).

2. На початку Mathcad-документа мають бути представлені початкові дані: параметри схеми заміщення (опори, індуктивності обмоток і кола намагнічення), момент інерції, кількість пар полюсів.

3. Нижче слід представити початкову інформацію, що відноситься до керуючих впливів (величина і частота напруги статора) і збурень (статичний момент опору).

4. На підставі співвідношень (7.1) необхідно скласти і записати у формі Коши систему моделюючих диференціальних рівнянь, які відповідають системі координат, що обертається із заданою частотою $\omega_k=0$. Форма запису системи нелінійних диференціальних рівнянь в Mathcad-документі наступна:

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} f_0(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \\ f_1(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \\ \dots \\ f_{n-1}(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \end{bmatrix}$$

де $f_i(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ - скалярна алгебраїчна функція, що відповідає правій частині i -го диференціального рівняння першого порядку у формі Коши.

Слід звернути увагу на правильність запису проекцій вектора напруги статора U_{lx} і U_{ly} . При синусоїдному характері напруги і заданій частоті обертання системи координат ω_k ці проекції в загальному вигляді можуть бути записані таким чином:

$$\begin{aligned} U_{lx}(t) &:= U_{lm} \cdot \cos[(\omega_l - \omega_k) \cdot t] \\ U_{ly}(t) &:= U_{lm} \cdot \sin[(\omega_l - \omega_k) \cdot t] \end{aligned}$$

5. На підставі співвідношень (7.2) необхідно скласти систему рівнянь зв'язку, що дозволяє визначати спостережувані величини. Форма запису системи рівнянь зв'язку в Mathcad-документі є наступною:

$$Y(X) := \begin{bmatrix} \varphi_0(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \\ \varphi_1(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \end{bmatrix}$$

де $\varphi_j(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ - скалярне алгебраїчне співвідношення, що відповідає правій частині j -го рівняння зв'язку.

6. Нижче слід вказати межі діапазону інтегрування - інтервал часу, впродовж якого має здійснюватися моделювання. Слід самостійно визначитися з кінцевим значенням діапазону (початкове прийняти рівним $tst:=0$), а також визначити прийнятний крок інтегрування Δt . Знаючи величину цього параметра, слід по аналогії з попередніми роботами обчислити необхідну кількість кроків чисельного інтегрування.

7. Вказати вектор початкових умов. Усі елементи цього вектора прийняти рівними нулю, оскільки моделюється перехідний процес пуску двигуна.

8. Запис функції, що розв'язує диференціальні рівняння, здійснюється у виді:

$$S := \text{rkfixed}(Xst, tst, tend, N, D)$$

Результатом розв'язання є масив **S** розмірністю $N \times 6$, причому нульовий стовпчик є вектором поточного часу, перший-четвертий - вектори проекцій потокозчеплень обмоток статора і ротора на відповідні координатні осі, п'ятий - вектор поточних значень частоти обертання ротора.

9. Для зручності представлення результатів слід виділити з масиву **S** відповідні вектори.

10. Використовуючи рівняння зв'язку, необхідно повекторно визначити масив значень величин **Y(X)**.

11. За допомогою співвідношення (7.4) слід визначити діючі значення модулів відповідних просторових векторів Ψ_1, Ψ_2, I_1, I_2 :

$$V := \sqrt{V_x^2 + V_y^2} / 2. \quad (7.4)$$

12. Використовуючи панель побудови графіків, слід представити графічні залежності $\Psi_1(t), \Psi_2(t), I_1(t), I_2(t), M(t), \omega_r(t), \omega_r(M)$.

Приклад моделювання асинхронної машини у системі Mathcad наведено на рис. 7.1 – 7.5.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи, вихідні дані.
2. Mathcad-документ, який містить рівняння, що описують процеси в асинхронній машині, а також результати їх чисельного розв'язання для випадку пуску двигуна.
3. Графіки, що ілюструють залежність основних електромагнітних і електромеханічних величин від часу, а також динамічну механічну характеристику машини, що отримані при моделюванні.
4. Висновки з аналізом отриманих результатів моделювання.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Накресліть Т-подібну заступну схему асинхронної машини і поясніть призначення елементів.
2. Для чого під час моделювання виконують перехід від трифазної до двофазної еквівалентної машини?
3. Як здійснюється перехід від машини з реальною кількістю пар полюсів до еквівалентної двополюсної машини?
4. Які системи координат використовуються для моделювання електричних машин?

Лабораторна робота №7

Моделювання перехідного процесу пуску асинхронного двигуна

Вихідні дані:

Параметри асинхронної машини:

$$\begin{array}{llll} L1 := 0.094 & R1 := 0.219 & L2 := 0.094 & R2 := 0.211 \\ Lm := 0.092 & p := 1 & J := 0.09 & \end{array}$$

Зовнішні впливи:

$$U1m := 310 \quad f1 := 50 \quad \omega1 := \frac{2 \cdot \pi \cdot f1}{p} \quad - \text{параметри напруги живлення}$$

$$Mc(X) := 0.1 \cdot X_4 \quad - \text{параметри статичного механічного навантаження}$$

Система диференціальних рівнянь стану форми Коши в нерухомій відносно статора системі координат:

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} U1m \cdot \cos(\omega1 \cdot t) - R1 \cdot \frac{X_0 \cdot L2 - X_2 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ U1m \cdot \sin(\omega1 \cdot t) - R1 \cdot \frac{X_1 \cdot L2 - X_3 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ -X_4 \cdot X_3 - \frac{X_2 \cdot L1 - X_0 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \cdot R2 \\ X_4 \cdot X_2 - \frac{X_3 \cdot L1 - X_1 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \cdot R2 \\ \frac{1}{J} \cdot \left(\frac{1.5 \cdot p \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \cdot (X_1 \cdot X_2 - X_0 \cdot X_3) - Mc(X) \right) \end{bmatrix}$$

Допоміжні рівняння зв'язку - вектор струмів обмоток та моменту двигуна:

$$Y(X) := \begin{bmatrix} \frac{X_0 \cdot L2 - X_2 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ \frac{X_1 \cdot L2 - X_3 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ \frac{X_2 \cdot L1 - X_0 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ \frac{X_3 \cdot L1 - X_1 \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \\ \frac{1.5 \cdot p \cdot Lm}{L1 \cdot L2 - Lm^2} \cdot (X_1 \cdot X_2 - X_0 \cdot X_3) \end{bmatrix}$$

Рисунок 7.1 – Модель асинхронної машини у Mathcad

Початкові умови:

$$tst := 0$$

- початок інтервалу моделювання

$$tend := 1$$

- кінець інтервалу моделювання

$$\Delta t := 0.001$$

- крок моделювання

$$N := \text{floor}\left(\frac{tend - tst}{\Delta t}\right) = 1 \cdot 10^3$$

- кількість кроків моделювання

$$Xst := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- вектор початкових значень змінних стану

Чисельне розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь стану:

$$S := \text{rkfixed}(Xst, tst, tend, N, D)$$

Визначення шуканих величин:

$$S1 := \text{submatrix}(S, 0, N, 1, 5)$$

$$i := 0, 1 \dots N$$

$$S2^{(i)} := Y\left((S1^T)^{(i)}\right)$$

$$S3 := S2^T$$

Результати моделювання:

$$t := S^{(0)}$$

- вектор поточних відліків часу

$$\Psi 1x := S^{(1)}$$

- вектор миттєвих значень проекції просторового вектора потокозчеплення статора на вісь x

$$\Psi 1y := S^{(2)}$$

- вектор миттєвих значень проекції просторового вектора потокозчеплення статора на вісь y

$$\Psi 1 := \sqrt{\Psi 1x^2 + \Psi 1y^2}$$

- вектор миттєвих значень модуля просторового вектора потокозчеплення статора

$$\Psi 2x := S^{(3)}$$

- вектор миттєвих значень проекції просторового вектора потокозчеплення ротора на вісь x

Рисунок 7.2 – Модель асинхронної машини у Mathcad



Рисунок 7.3 – Модель асинхронної машини у Mathcad

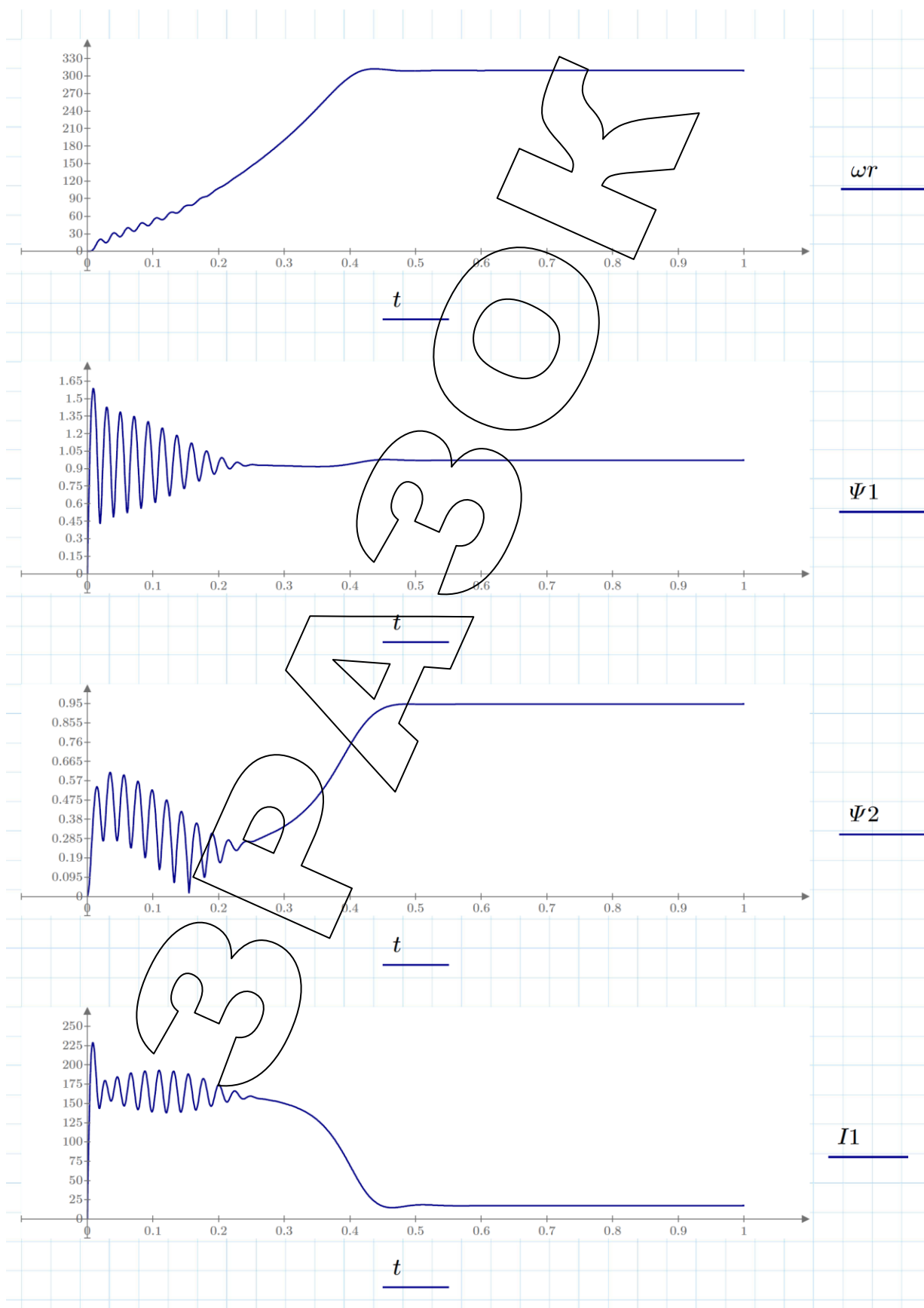


Рисунок 7.4 – Модель асинхронної машини у Mathcad

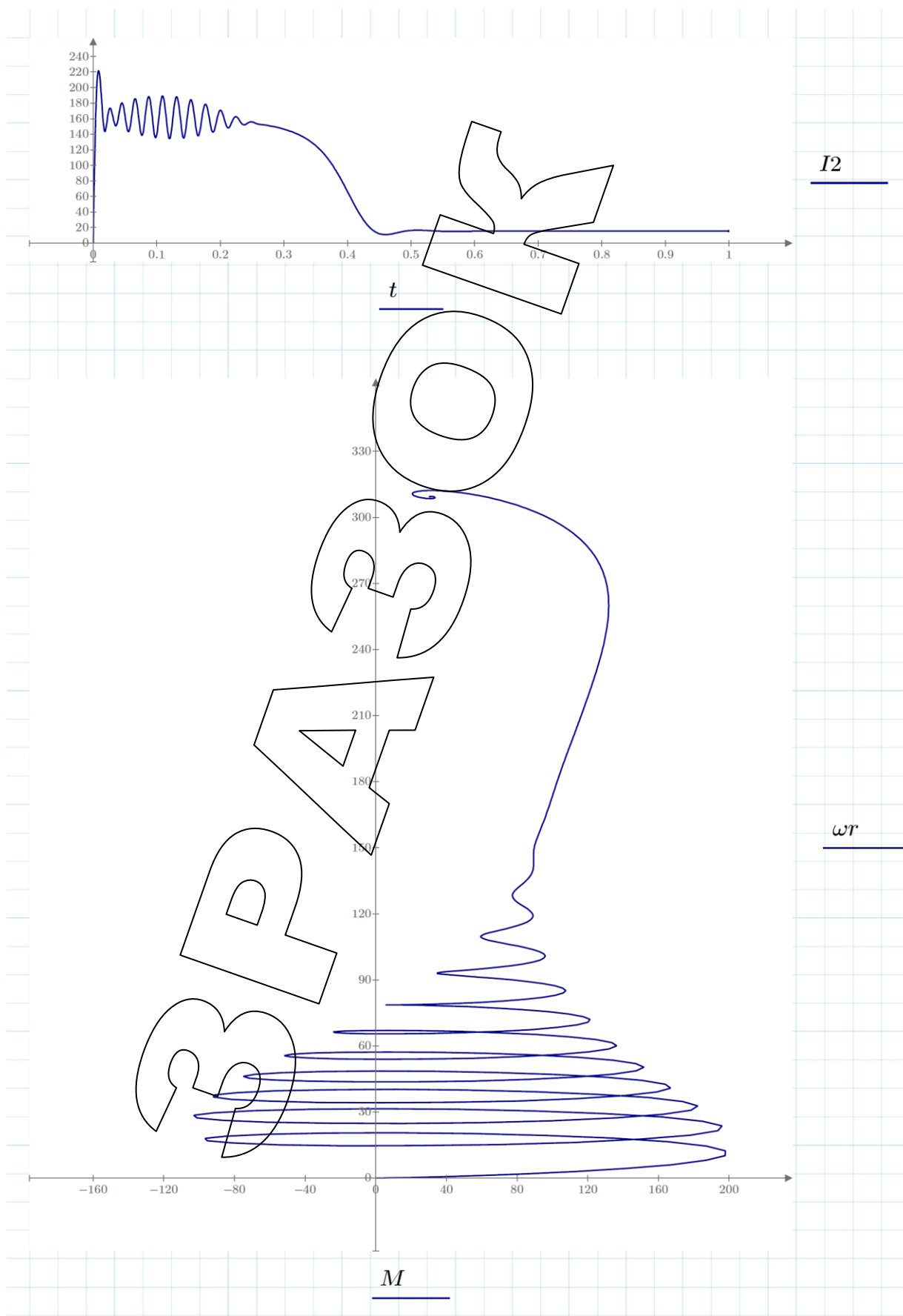


Рисунок 7.5 – Модель асинхронної машини у Mathcad

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Апроксимація експериментальних даних за допомогою методу найменших квадратів

Мета: отримати навички використання методу найменших квадратів для апроксимації експериментальних даних.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найбільш поширеним методом апроксимації експериментальних даних є метод найменших квадратів. Метод дозволяє використовувати апроксимуючі функції довільного виду і відноситься до групи глобальних методів. Простим варіантом методу найменших квадратів є апроксимація прямою лінією (поліномом першого ступеня). Цей варіант методу найменших квадратів носить також назву лінійної регресії.

Критерієм близькості в методі найменших квадратів є вимога мінімального значення суми квадратів відхилень апроксимуючої функції від експериментальних точок:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n y_i - f(x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Метод не вимагає, щоб апроксимуюча функція проходила через усі задані точки, що особливо важливо при апроксимації даних, які містять похибки.

Важливою особливістю методу є те, що апроксимуюча функція може бути довільною. Її вид визначається особливостями задачі, наприклад, фізичними міркуваннями, якщо проводиться апроксимація результатів фізичного експерименту. Найчастіше зустрічаються апроксимація прямою лінією (лінійна регресія), апроксимація поліномом (поліноміальна регресія), апроксимація лінійною комбінацією довільних функцій. Крім того, часто буває можливо шляхом заміни змінних звести завдання до лінійної (провести лінеаризацію). Наприклад, розглянемо випадок, коли апроксимуюча функція шукається у вигляді $y = A \cdot e^{kx}$. Прологарифмуємо цей вираз і введемо позначення $z = \ln(y)$, $a = \ln(A)$. Тоді в нових позначеннях завдання зводиться до відшукування коефіцієнтів лінійної функції $z = a + kx$.

Для ряду двопараметричних залежностей, що часто зустрічаються, можливі заміни змінних, що приведені в табл. 8.1.

Слід враховувати, що якщо початкові дані не задовольняють наведеним обмеженням для конкретної залежності, наприклад, значення x або y від'ємні або нульові, то логарифмування або ділення на нуль виконати неможливо. У цьому випадку необхідно зрушити шкалу x або y в позитивну область:

$$y' = y + \Delta y; \quad x' = x + \Delta x.$$

При цьому потрібне виконання умов $\Delta x > \max_{x_i < 0} |x_i|$, $\Delta y > \max_{y_i < 0} |y_i|$.

Після відшукування виду апроксимуючої залежності для x' і y' необхідно повернутися до первинних координат x і y .

Таблиця 8.1

Перелік двопараметричних залежностей

№	Залежність	Заміна змінних		Зворотна заміна змінних		Обмеження
0	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$v = y$	$u = \frac{1}{x}$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x \neq 0$
1	$y = a_0 + a_1 \ln x$	$v = y$	$u = \ln x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x > 0$
2	$y = a_0 e^{a_1 x}$	$v = \ln y$	$u = x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$	$y > 0 \quad a_0 > 0$
3	$y = a_0 x^{a_1}$	$v = \ln y$	$u = \ln x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$	$x > 0 \quad y > 0$ $a_0 > 0$
4	$y = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$	$v = \frac{1}{y}$	$u = e^{-x}$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$
5	$y = a_0 a_1^x$	$v = \ln y$	$u = x$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = e^{b_1}$	$y > 0$
6	$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$	$v = \frac{1}{y}$	$u = x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$ $x \neq -a_0/a_1$
7	$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$	$v = \frac{x}{y}$	$u = x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$y \neq 0$ $x \neq -a_0/a_1$
8	$y = a_0 + a_1 \lg x$	$v = y$	$u = \lg x$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$	$x > 0$

ЗАВДАННЯ

У табл. 8.2 початкових даних приведені експериментально отримані точки, що визначають залежність між змінними x і y . Необхідно скласти Mathcad-документ, що дозволяє лінеаризувати залежність і підібрати параметри a_0 і a_1 за методом найменших квадратів. Перевірити правильність обчислень за допомогою відомої залежності. Правильно складений документ даватиме нехтовно малу нев'язку. Оскільки вид залежності спочатку невідомий, слід виконати обчислення для усіх залежностей з табл. 8.1 і вибрати ту з них, яка забезпечує найменшу сумарну нев'язку.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. По номеру варіанта вибрати з табл. 8.1 вихідні дані.
2. У пакеті Mathcad скласти документ для апроксимації експериментальних даних за методом найменших квадратів. Вид апроксимуючої функції обирається згідно з табл. 8.1 за критерієм мінімальної нев'язки. Приклад виконання роботи наведено на рис. 8.1 – 8.4.
3. Оформити звіт про виконання лабораторної роботи

Таблиця 8.2

Вихідні дані

1	x	-1	-0,55	-0,4	-0,35	0,8	1,25	1,7	2,15	2,6	3,05
	y	-6,78	-6,56	-6,14	-5,31	-3,68	-0,85	5,81	18,15	42,4	90,03
2	x	0,01	0,56	1,11	1,66	2,21	2,28	3,3	3,85	4,4	4,95
	y	34,23	5,97	1,28	-1,54	-3,54	-5,09	-6,36	-7,44	-8,37	-9,2
3	x	0,4	0,81	1,22	1,5	2,04	2,45	2,86	3,27	3,68	4,09
	y	1,8	0,53	0,12	-0,09	-0,21	-0,31	-0,35	-0,39	-0,43	-0,46
4	x	0,3	1,57	2,84	4,11	5,38	6,65	7,92	9,19	10,46	11,73
	y	15,33	4,55	3,41	2,97	2,74	2,6	2,59	2,44	2,38	2,34
5	x	-3,5	-2,65	-1,8	-0,95	-0,	0,75	1,6	2,45	3,3	4,15
	y	0,01	0,03	0,07	0,12	0,19	0,2	0,29	0,31	0,325	0,33
6	x	0,15	0,94	1,72	2,51	3,29	4,08	4,86	5,65	6,43	7,22
	y	-9,69	4,2	-2,37	-1,25	-0,43	0,21	0,74	1,3	1,58	1,93
7	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,675	3,14	3,605	4,07	4,535
	y	6,86	5,23	4,78	4,57	4,45	4,37	4,35	4,28	4,25	4,22
8	x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
	y	4,14	4,2	4,3	4,45	4,67	5	5,49	6,85	7,32	8,95
9	x	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7
	y	2,67	4,06	6,16	8,13	10,92	14,29	18,29	22,97	28,39	34,6
10	x	0,01	0,53	1,05	1,57	2,09	2,61	3,12	3,64	4,16	4,68
	y	15,22	3,31	1,26	0,05	-0,81	-1,74	-2,17	-2,48	-2,88	-3,23
11	x	0,95	1,21	1,47	1,74	2,0	2,26	2,52	2,78	3,05	3,31
	y	8,16	3,39	2,19	1,34	0,88	0,61	0,54	0,33	0,28	0,19
12	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,68	3,14	3,61	4,07	4,535
	y	16,99	8,83	6,61	5,56	4,96	4,62	4,29	4,09	3,93	3,8
13	x	-1,7	-1,43	-1,16	-0,89	-0,62	-0,35	-0,08	0,19	0,46	0,73
	y	26,96	14,46	7,17	2,92	0,45	-0,98	-1,35	-2,31	-2,6	-2,77
14	x	-1	-0,72	-0,44	-0,17	0,12	0,39	0,67	0,95	1,22	1,5
	y	-4,95	4,89	-4,74	-4,39	-3,6	-1,93	2,42	12,08	34,33	85,55
15	x	0,01	0,51	1,01	1,51	2,01	2,51	3,01	3,51	4,01	4,51
	y	-4,76	2,29	3,52	4,24	4,76	5,06	5,48	5,76	6,0	6,21
16	x	0,4	0,86	1,32	1,78	2,24	2,7	3,16	3,62	4,08	4,54
	y	-20,5	-11,2	-8,3	-6,93	-6,5	-5,59	-5,3	-4,93	4,83	-4,54
17	x	0,01	0,51	1,01	1,52	2,01	2,51	3,0	3,05	4,0	4,5
	y	-1,14	2,39	3,01	3,37	3,63	3,83	3,99	4,13	4,25	4,35
18	x	0,11	0,499	0,89	1,28	1,67	2,055	2,44	2,83	3,22	3,61
	y	6,27	0,6	-0,1	-0,37	-0,52	-0,61	-0,67	-0,69	-0,75	-0,78
19	x	-2,1	-1,79	-1,48	-1,17	-0,86	-0,55	-0,24	0,07	0,38	0,69
	y	0,28	0,29	0,3	0,32	0,36	0,48	0,78	1,52	3,41	8,21
20	x	0,01	0,53	1,05	1,57	2,09	2,61	3,12	3,64	4,16	4,68
	y	15,22	3,31	1,26	0,05	-0,81	-1,74	-2,17	-2,48	-2,88	-3,23

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема і мета роботи, номер варіанта і вихідні дані.
2. Mathcad-документ, який забезпечує апроксимацію експериментальних даних за методом найменших квадратів.
3. Висновки з аналізом результатів апроксимації.

Лабораторна робота №8 **Апроксимація експериментальних даних за допомогою метода** **найменших квадратів**

Вихідні дані:

$$X1 := \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.59 \\ 1.17 \\ 1.75 \\ 2.33 \\ 2.91 \\ 3.48 \\ 4.06 \\ 4.64 \\ 5.22 \end{bmatrix} \quad Y1 := \begin{bmatrix} 8.82 \\ -3.41 \\ -5.93 \\ -6.67 \\ -7.53 \\ -8.2 \\ -8.74 \\ -9.15 \\ -9.61 \\ -9.96 \end{bmatrix}$$

$$n := \text{length}(X1)$$

$$i := 0 \dots n - 1$$

Зміщення функції в першу чверть:

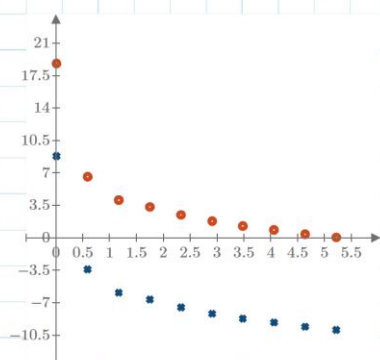
$$dX := 0$$

$$dY := 10$$

Зміщена функція:

$$X_i := X1_i + dX$$

$$Y_i := Y1_i + dY$$



$X1$

X

Рисунок 1 - Опорні точки вихідної та зміщеної функцій

Номери апроксимуючих функцій:

$$j := 0 \dots 8$$

Заміна змінних:

$$fv(x, y) := \left[y \quad y \ln(y) \quad \ln(y) \quad \frac{1}{y} \ln(y) \quad \frac{1}{y} \quad \frac{x}{y} \quad y \right]$$

вектор замін $v=v(y)$ для всіх апроксимуючих функцій

$$fv(X_0, Y_0) = [18.82 \quad 18.82 \quad 2.935 \quad 2.935 \quad 0.053 \quad 2.935 \quad 0.053 \quad 5.313 \cdot 10^{-4} \quad 18.82]$$

$$fv(X_1, Y_1) = [6.59 \quad 6.59 \quad 1.886 \quad 1.886 \quad 0.152 \quad 1.886 \quad 0.152 \quad 0.09 \quad 6.59] \quad \text{і так далі}$$

Рисунок 8.1 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

$$fu(x) := \left[\frac{1}{x} \ln(x) \ x \ln(x) \ \exp(-x) \ x \ x \ x \ \log(x) \right] \quad \text{вектор замін } u=u(y) \text{ для всіх апроксимуючих функцій}$$

$$fu(X_0) = [100 \ -4.605 \ 0.01 \ -4.605 \ 0.99 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ -2]$$

$$fu(X_1) = [1.695 \ -0.528 \ 0.59 \ -0.528 \ 0.554 \ 0.59 \ 0.59 \ 0.59 \ -0.229]$$

і так далі

Формування матриць нових змінних U та V, які містять точки лінеаризованих залежностей (№ стовпчика відповідає номеру апроксимуючої функції, № рядка відповідає номеру опорної точки):

$$U_{i,j} := \left((fu(X_i))^{(j)} \right)_0 \quad V_{i,j} := \left((fv(X_i, Y_i))^{(j)} \right)_0$$

Обчислення параметрів лінеаризованої залежності для j-ї апроксимуючої функції:

$$Mu_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i U_{i,j}$$

$$Mv_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i V_{i,j}$$

$$Kuv_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i (U_{i,j} - Mu_j) \cdot (V_{i,j} - Mv_j)$$

$$S2_j := \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \sum_i (U_{i,j} - Mu_j)^2$$

$$b1_j := \frac{Kuv_j}{S2_j}$$

$$b0_j := Mv_j - b1_j \cdot Mu_j$$

Отримали вектори b0 та b1, що містять коефіцієнти лінійних залежностей $v=b0+b1 \cdot u$ для кожної з апроксимуючих функцій.

Визначимо коефіцієнти a0 та a1 вихідної апроксимуючої залежності:

$$fa0(q) := [q \ q \ \exp(q) \ \exp(q) \ q \ \exp(q) \ q \ q \ q]$$

вектори зворотної заміни змінних для всіх функцій

$$fa1(q) := [q \ q \ q \ q \ q \ \exp(q) \ q \ q \ q]$$

$$a0_j := \left(fa0(b0_j)^{(j)} \right)_0$$

$$a1_j := \left(fa1(b1_j)^{(j)} \right)_0$$

$$a0 = \begin{bmatrix} 2.213 \\ 4.961 \\ 17.222 \\ 2.018 \\ 4.695 \\ 17.222 \\ -3.664 \\ -19.933 \\ 4.961 \end{bmatrix}$$

$$a1 = \begin{bmatrix} 0.167 \\ -2.996 \\ -0.903 \\ -0.659 \\ -6.998 \\ 0.405 \\ 2.595 \\ 13.484 \\ -6.9 \end{bmatrix}$$

Отримали вектори a0 та a1, що містять параметри всіх апроксимуючих функцій

Рисунок 8.2 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

Визначення нев'язок для всіх апроксимуючих функцій:

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &:= a_{0_0} - dY + \frac{a_{1_0}}{x - dX} & d_0 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_0(X_{1_i}))^2 & d_0 &= 32.298 \\
 f_1(x) &:= a_{0_1} - dY + a_{1_1} \cdot \ln(x + dX) & d_1 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_1(X_{1_i}))^2 & d_1 &= 0.199 \\
 f_2(x) &:= a_{0_2} \cdot \exp(a_{1_2} \cdot x + dX) - dY & d_2 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_2(X_{1_i}))^2 & d_2 &= 20.061 \\
 f_3(x) &:= a_{0_3} \cdot (x + dX)^{a_{1_3}} - dY & d_3 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_3(X_{1_i}))^2 & d_3 &= 560.238 \\
 f_4(x) &:= \frac{1}{a_{0_4} + a_{1_4} \cdot \exp(-x + dX)} - dY & d_4 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_4(X_{1_i}))^2 & d_4 &= 431.682 \\
 f_5(x) &:= a_{0_5} \cdot (a_{1_5})^{x + dX} - dY & d_5 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_5(X_{1_i}))^2 & d_5 &= 20.061 \\
 f_6(x) &:= \frac{1}{a_{0_6} + a_{1_6} \cdot (x + dX)} - dY & d_6 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_6(X_{1_i}))^2 & d_6 &= 459.611 \\
 f_7(x) &:= \frac{x + dX}{a_{0_7} + a_{1_7} \cdot (x + dX)} - dY & d_7 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_7(X_{1_i}))^2 & d_7 &= 435.121 \\
 f_8(x) &:= a_{0_8} - dY + a_{1_8} \cdot \log(x + dX) & d_8 &:= \sum_i (Y_{1_i} - f_8(X_{1_i}))^2 & d_8 &= 0.199
 \end{aligned}$$

Найменше значення сумарної нев'язки - для логарифмічних функцій $f_1(x)$ та $f_8(x)$.

Приймаємо функцію $f_1(x)$

Таким чином, вихідна залежність може бути апроксимована функцією виду:

$$f_1(x) := a_{0_1} - dY + a_{1_1} \cdot \ln(x + dX)$$

$$\text{де} \quad a_{0_1} = 4.961 \quad a_{1_1} = -2.996 \quad dY = 10 \quad dX = 0$$

Проміжні точки для побудови графіка апроксимуючої функції:

$$xp := \min(X_1), \frac{\max(X_1) - \min(X_1)}{100} \dots \max(X_1)$$

Рисунок 8.3 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

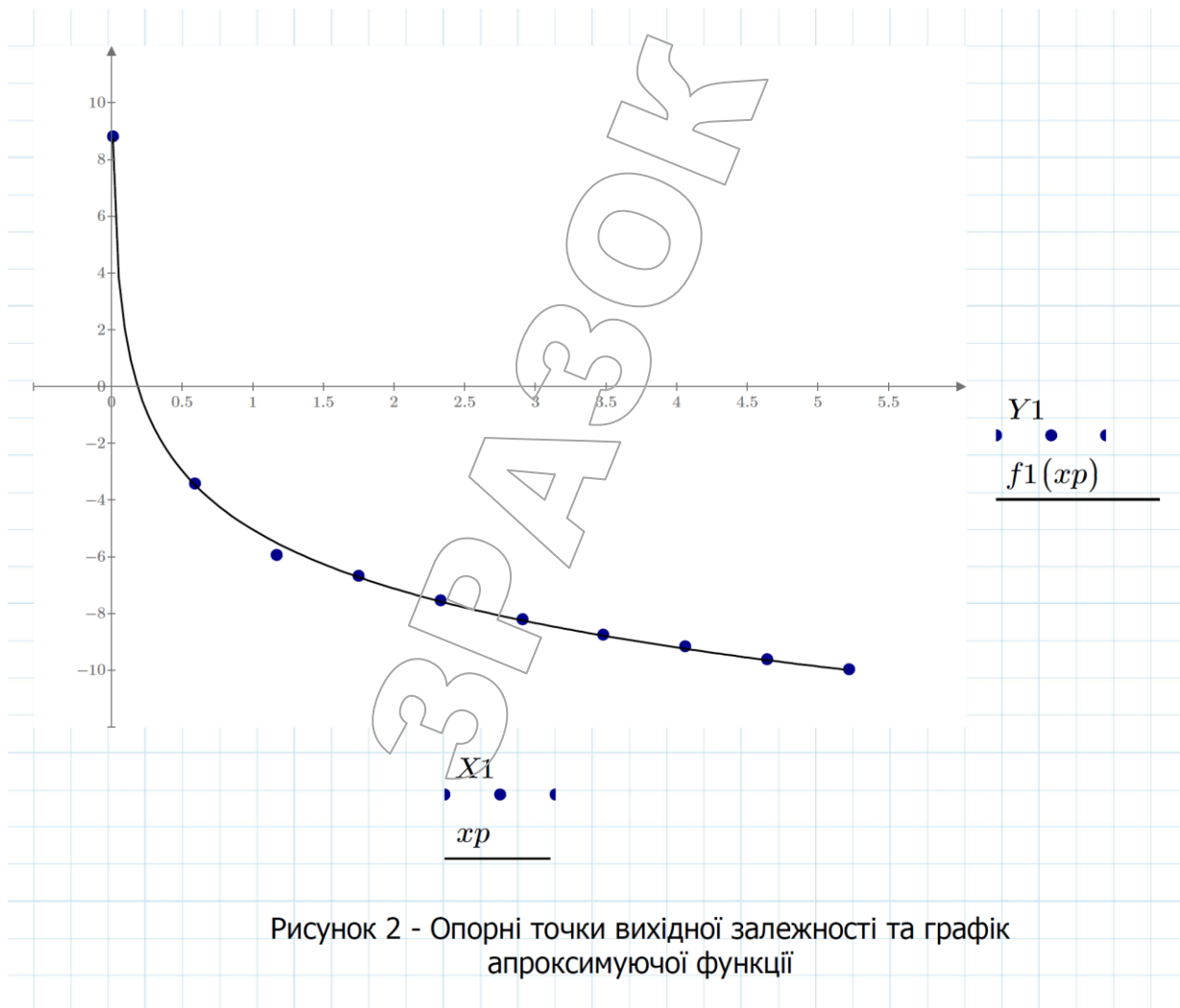


Рисунок 8.4 – Апроксимація експериментальних даних у Mathcad

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення інтерполяції та апроксимації.
2. В чому полягає метод найменших квадратів?
3. Як формулюється критерій методу найменших квадратів?
4. Наведіть приклади застосування методу найменших квадратів.
5. Для чого у лабораторній роботі використовувалася лінеаризація?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини

Мета: освоїти методи точкової оцінки числових характеристик випадкової величини.

ЗАВДАННЯ

За заданими значенням математичного сподівання m та стандартного відхилення s (табл. 9.1) необхідно за допомогою засобів системи Mathcad генерувати вибірку заданого об'єму N з нормальним законом розподілу. здійснити точкову оцінку параметрів отриманої вибірки з використанням методу моментів та методу максимальної правдоподібності. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 9.1

Вихідні дані

Варіант	m	S	N	Варіант	m	S	N
1	5.3	2.6	100	11	4.5	2.0	50
2	4.6	2.0	120	12	8.2	3.9	90
3	7.8	2.1	90	13	4.8	2.2	80
4	5.8	2.3	80	14	7.3	3.1	110
5	6.5	2.4	60	15	5.0	2.3	100
6	5.8	2.5	90	16	6.8	3.5	70
7	6.1	2.1	70	17	6.2	3.0	80
8	8.2	4.0	50	18	4.6	2.2	90
9	6.3	2.9	100	19	8.0	3.9	100
10	7.5	3.6	60	20	4.6	2.4	60

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Обрати вихідні дані згідно з табл. 9.1.
2. Скласти Mathcad документ, в якому передбачити (рис. 9.1 – 9.3):
 - введення вихідних даних;
 - генерацію вибірки випадкових чисел з нормальним законом розподілу, для чого можна скористатися функцією `gnorm`;
 - точкову оцінку числових характеристик вибірки методом моментів;
 - точкову оцінку числових характеристик вибірки методом максимальної правдоподібності;
 - аналіз отриманих результатів та побудову кривої розподілу заданої випадкової величини.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи, вихідні дані.
2. Mathcad документ, де здійснюється оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини.
3. Висновки з аналізом отриманих результатів.

Лабораторна робота №9
Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини

1. Вихідні дані. Параметри вибірки з нормальним розподілом:

$m := 5$ - математичне сподівання

$s := 1.5$ - стандартне відхилення

$N := 100$ - об'єм вибірки

2. Генерація вибірки випадкових чисел з нормальним законом розподілу

$X := \text{rnorm}(N, m, s)$

$i := 0 \dots N - 1$

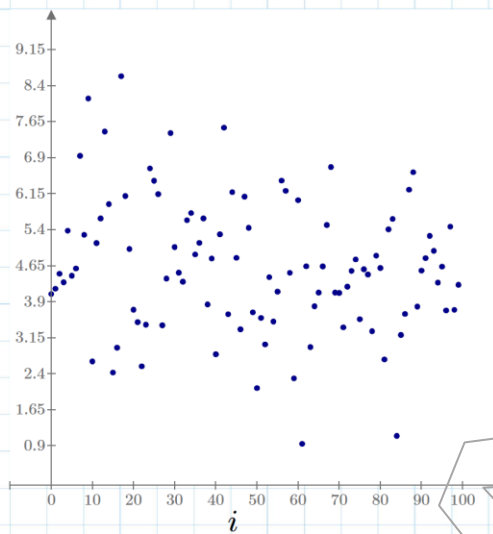


Рисунок 1 - Графічне зображення
отриманої вибірки випадкових чисел з
нормальним законом розподілу

3. Точкова оцінка параметрів нормального розподілу

Нормальний розподіл описується щільністю:

$$f(x, a, \sigma) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

де a, σ - шукані параметри розподілу

3.1 Метод моментів

Метод моментів точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає у прирівнюванні теоретичних моментів розподілу, що розглядається, емпіричним моментам того самого порядку.

Рисунок 9.1 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини
у Mathcad

Точкові оцінки параметрів нормального розподілу становлять:

- оцінкою параметра μ є вибіркова середня (математичне сподівання)
- оцінкою параметра σ є вибіркове середнє квадратичне відхилення

Дані параметри можна оцінити двома способами:

3.1.1 Оцінка параметрів за методом моментів з використанням аналітичних залежностей

$$a1 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_i = 4.632$$

- оцінка параметра μ

$$s1 := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - a1)^2} = 1.399$$

- оцінка параметра σ

3.1.2 Оцінка параметрів за методом моментів з використанням вбудованих функцій Mathcad

$$a2 := \text{mean}(X) = 4.632$$

- функція $\text{mean}(V)$ повертає математичне сподівання елементів вектора V

$$s2 := \text{stdev}(X) = 1.399$$

- функція $\text{stdev}(V)$ повертає стандартне відхилення елементів вектора V

Отримані в п.3.1.1 та 3.1.2 значення параметрів розподілу співпадають.

3.2 Метод найбільшої правдоподібності

Полягає у розрахунку таких значень параметрів, при яких логарифмічна функція правдоподібності досягає максимуму.

Логарифмічна функція правдоподібності визначається виразом:

$$L2(a, s) := \ln \left(\prod_{i=0}^{N-1} f(X_i, a, s) \right)$$

Оскільки логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників, то:

$$L1(a, s) := \sum_{i=0}^{N-1} \ln(f(X_i, a, s))$$

Відшукування максимуму $L1$ рівнозначно відшукуванню мінімуму функції:

$$L(a, s) := - \sum_{i=0}^{N-1} \ln(f(X_i, a, s))$$

Рисунок 9.2 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини у Mathcad

Розрахунки слід виконувати у блоці розв'язання (панель "Математика" (Math) - >> кнопка "Блок решения" (Solve Block))

Начальные приближения

$a := 4$
 $s := 2$

У Solve Block текстові коментарі не допускаються

Ограничения

$a > 0$
 $s > 0$
 $s < 10$
 $a < 10$

використовується знак = з панелі "Порівняння" (Сравнение) !!!

Решатель

$$\begin{bmatrix} a3 \\ s3 \end{bmatrix} := \text{Minerr}(a, s)$$

$a3 = 4.632$
 $s3 = 1.399$

- отримані значення

Перевірка досягнення логарифмічною функцією правдоподібності максимуму при отриманих коренях:

$$d2a(a, s) := \frac{d^2}{da^2} L1(a, s) \quad d2a(a3, s3) = -51.096$$

$$d2s(a, s) := \frac{d^2}{ds^2} L1(a, s) \quad d2s(a3, s3) = -102.192$$

Оскільки другі частинні похідні від'ємні, то при даних значеннях параметрів логарифмічна функція правдоподібності досягає максимуму.

Рисунок 9.3 - Оцінка числових характеристик розподілу випадкової величини у Mathcad

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення випадковій величині.
2. Що таке вибірка, генеральна сукупність?
3. Які основні характеристики випадкової величини?
4. Як обрахувати вибіркове математичне сподівання, вибіркиму дисперсію?
5. Які функції Mathcad для обрахування точкових оцінок параметрів нормального розподілу випадкової величини Вам відомі?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10

Параметричне оцінювання випадкових процесів

Мета: оволодіти навичками визначення основних параметрів реалізацій випадкового процесу.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення, яке заздалегідь невідоме.

Випадковою функцією називається функція, яка в результаті досліду може набрати того або іншого конкретного вигляду, невідомого заздалегідь.

При фіксованому значенні часу t_j випадкова функція перетворюється на випадкову величину, яка називається **перетином** випадкової функції у момент t_j .

Випадковий процес - випадкова функція, аргументом якої є час.

Реалізація випадкової функції - конкретний вид, що приймається випадковою функцією в результаті досліду. Якщо над випадковою функцією здійснити групу дослідів, то отримаємо групу або "сімейство" реалізацій цієї функції.

На практиці дуже часто зустрічаються випадкові процеси, що протікають в часі приблизно однорідно і мають вигляд безперервних випадкових коливань навколо деякого середнього значення, причому ні середня амплітуда, ні характер цих коливань не виявляють істотних змін з часом. Такі випадкові процеси називаються **стаціонарними**.

Кожен стаціонарний процес можна розглядати як такий, що триває в часі невизначено довго. При дослідженні стаціонарного процесу в якості початку відліку можна вибрати будь-який момент часу. Досліджуючи стаціонарний процес на будь-якій ділянці часу, ми повинні отримати одні і ті ж його характеристики.

Приклад стаціонарного випадкового процесу наведений на рис. 10.1.

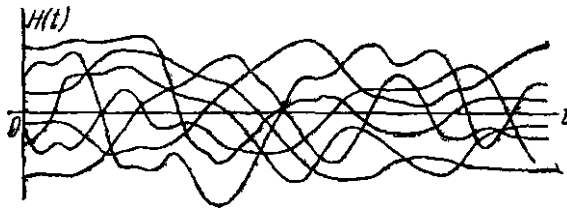


Рисунок 10.1 - Приклад стаціонарного випадкового процесу

На противагу стаціонарним випадковим процесам можна вказати інші, явно нестаціонарні випадкові процеси, наприклад: процес затухаючих коливань в електричному колі. Нестационарний процес має певну тенденцію розвитку в часі; характеристики такого процесу залежать від початку відліку і залежать від часу.

На рис. 10.2 зображено сімейство реалізацій явно нестаціонарного випадкового процесу.

Далеко не всі нестаціонарні випадкові процеси є істотно нестаціонарними впродовж свого розвитку. Існують нестаціонарні процеси, які на відомих часових інтервалах і з відомим наближенням можуть бути прийняті стаціонарними.

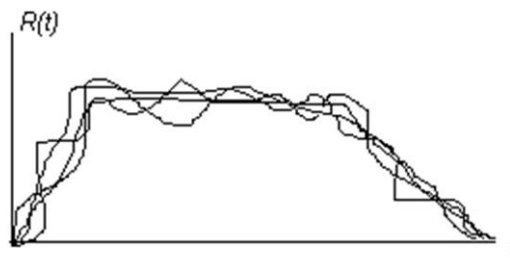


Рисунок 10.2 - Приклад нестаціонарного випадкового процесу

Як правило, випадковий процес в будь-якій динамічній системі починається з нестаціонарної стадії - з так званого "перехідного процесу". Після згасання перехідного процесу система зазвичай переходить на сталий режим, і тоді випадкові процеси, що протікають в ній, можуть вважатися стаціонарними.

Стаціонарні випадкові процеси дуже часто зустрічаються у фізичних і технічних завданнях. За своєю природою ці процеси простіші, ніж нестаціонарні, і описуються простішими характеристиками. Лінійні перетворення стаціонарних випадкових процесів також зазвичай здійснюються простіше, ніж нестаціонарних. У зв'язку з цим на практиці отримала широке застосування спеціальна теорія стаціонарних випадкових процесів, або, точніше, теорія стаціонарних випадкових функцій (оскільки аргументом стаціонарної випадкової функції в загальному випадку може бути і не час).

Таким чином, випадковий процес $X(t)$ називається **стаціонарним**, якщо усі його імовірнісні характеристики не залежать від t (точніше, не міняються при будь-якому зрушенні аргументів, від яких вони залежать, по осі t).

У цьому елементарному викладі теорії випадкових функцій ми не користуємося такими імовірнісними характеристиками, як закони розподілу. Єдиними характеристиками, якими ми користуємося, є: 1) математичне сподівання, 2) дисперсія; 3) середнє квадратичне відхилення; 4) кореляційна функція.

Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $m(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину випадкової функції.

Математичне сподівання випадкової функції є деякою середньою функцією, біля якої по-різному варіюються конкретні реалізації випадкової функції. На рис. 10.3 тонкими лініями показані реалізації випадкової функції, товстою лінією - її математичне сподівання.

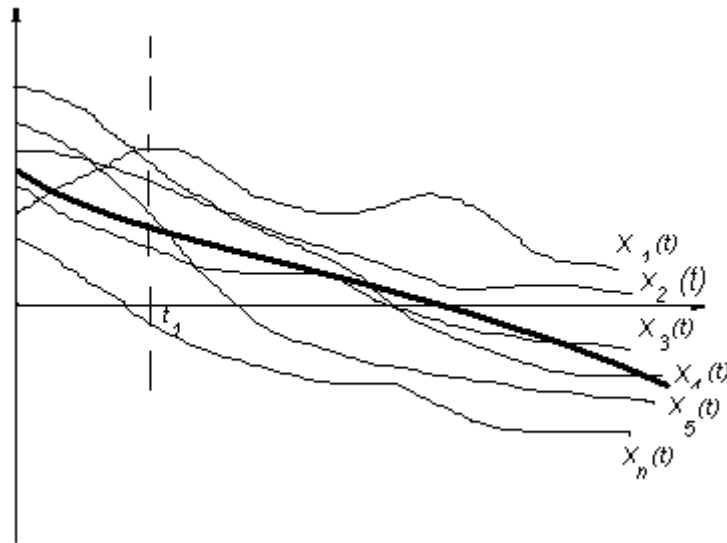


Рисунок 10.3 - Математичне сподівання випадкової функції

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $D(t)$, значення якої для кожного t дорівнює дисперсії відповідного перетину випадкової функції.

Дисперсія випадкової функції при кожному t характеризує розкид можливих реалізацій випадкової функції відносно середнього, іншими словами, є "мірою випадковості" випадкової функції. Очевидно, $D(t)$ є невід'ємною функцією.

Середнє квадратичне відхилення випадкової функції є квадратним коренем з дисперсії:

$$S(t) = \sqrt{D(t)}$$

Розглянемо, що являє собою **кореляційна функція**.

Математичне сподівання і дисперсія є дуже важливими характеристиками випадкової функції. Проте для опису основних особливостей випадкової функції цих характеристик недостатньо. Щоб переконатися в цьому, розглянемо дві випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$, наочно зображені сімействами реалізацій на рис. 10.4 і 10.5.

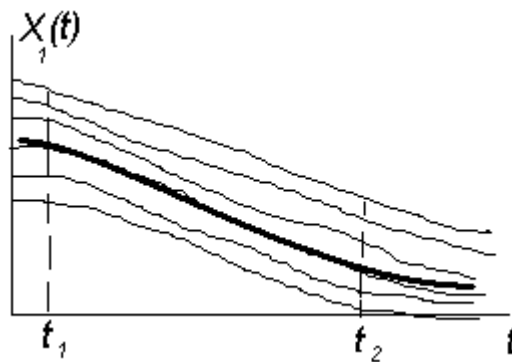


Рисунок 10.4 - Випадкова функція з плавною зміною значень

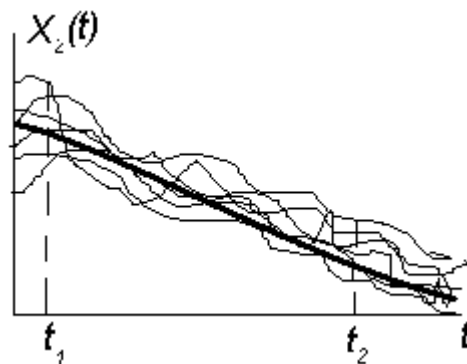


Рисунок 10.5 - Випадкова функція зі стохастичними коливаннями

У випадкових функцій $X_1(t)$ і $X_2(t)$ приблизно однакові математичні сподівання і дисперсії; проте характер цих випадкових функцій суттєво відрізняється. Для випадкової функції X_1 характерна плавна, поступова зміна (рис. 10.4). Якщо, наприклад, в точці t_1 випадкова функція $X_1(t)$ набула значення, що суттєво перевищує середнє, то висока імовірність того, що і в точці t_2 вона також набуде значення, що перевищує середнє. Для випадкової функції $X_1(t)$ характерна яскраво виражена залежність між її значеннями при різних t . Навпаки, випадкова функція X_2 (рис. 10.5) має різко коливальний характер з неправильними, безладними коливаннями. Для такої випадкової функції характерне швидке загасання залежності між її значеннями при збільшенні відстані по t між ними.

Очевидно, внутрішня структура обох випадкових процесів абсолютно різна, але ця відмінність не відображається ні математичним сподіванням, ні дисперсією. Для її опису необхідно ввести спеціальну характеристику. Ця характеристика називається **кореляційною функцією**. Кореляційна функція характеризує міру залежності між перетинами випадкової функції, що відносяться до різних t .

Розглянемо випадкову функцію X (рис. 10.6), для якої позначено два перетини, що відносяться до різних моментів: t_1 і t_2 , тобто дві випадкові величини $X(t_1)$ і $X(t_2)$. Очевидно, що при близьких значеннях t_1 і t_2 величини $X(t_1)$ і $X(t_2)$ пов'язані залежністю: якщо величина $X(t_1)$ набула якогось значення, то і величина $X(t_2)$ з великою імовірністю набуде значення,

близького до нього. Очевидно також, що при збільшенні інтервалу (t_1, t_2) між перерізами залежність величин $X(t_1)$ і $X(t_2)$ стає менш явною.

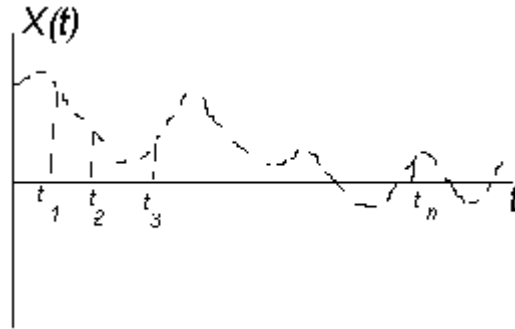


Рисунок 10.6 - Випадкова функція $X(t)$ на відрізку часу t

Міра залежності величин $X(t_1)$ і $X(t_2)$ може бути значною мірою охарактеризована їх кореляційним моментом; очевидно, він є функцією двох аргументів t_1 і t_2 . Ця функція і називається кореляційною функцією.

Таким чином, **кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція двох аргументів $K_x(t_1, t_2)$, яка при кожній парі значень t_1, t_2 дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкової функції.**

Повернемося до прикладів випадкових функцій X_1 і X_2 (рис. 10.4 і 10.5). Можна встановити, що при однакових математичних сподіваннях і дисперсіях випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$ мають абсолютно різні кореляційні функції. Кореляційна функція випадкової функції $X_1(t)$ повільно зменшується при збільшенні проміжку (t_1, t_2) ; навпаки, кореляційна функція випадкової функції $X_2(t)$ швидко зменшується зі збільшенням цього проміжку.

Оскільки зміна стаціонарної випадкової функції повинна протікати однорідно за часом, то природно зажадати, щоб для стаціонарної випадкової функції математичне сподівання було сталим:

$$m = \text{const} \quad (10.1)$$

Проте, ця вимога не є істотною: ми знаємо, що від випадкової функції $X(t)$ завжди можна перейти до центрованої випадкової функції $X^0(t)$, для якої математичне сподівання дорівнює нулю і, отже, задовольняє умові (10.1). Таким чином, якщо випадковий процес нестационарний тільки за рахунок змінного математичного сподівання, це не перешкодить нам вивчати його як стаціонарний процес.

Друга умова, якій, очевидно, повинна задовольняти стаціонарна випадкова функція, - це умова незмінності дисперсії:

$$D(t) = D = \text{const}. \quad (10.2)$$

Встановимо, якій умові повинна задовольняти кореляційна функція стаціонарної випадкової функції. Розглянемо випадкову функцію X (рис. 10.7).

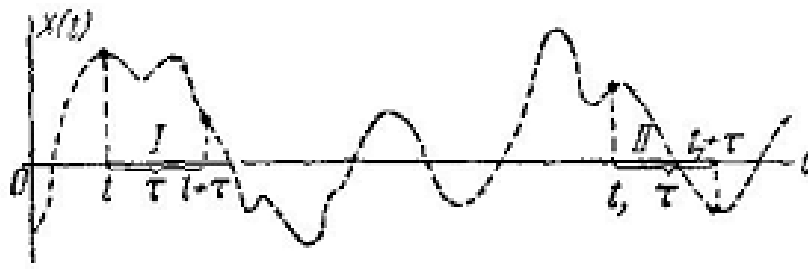


Рисунок 10.7 - До визначення кореляційної функції

Прийmemo у виразі $K_x(t_1, t_2)$ $t_2 = t_1 + \tau$ і розглянемо $K_x(t_1, t_1 + \tau)$ (кореляційний момент двох перерізів випадкової функції, що розділені інтервалом часу τ). Очевидно, якщо випадковий процес $X(t)$ дійсно стаціонарний, то цей кореляційний момент не повинен залежати від того, де саме на осі t розглядається ділянка τ , а повинен залежати тільки від довжини цієї ділянки. Наприклад, для ділянок I і II на рис. 10.7, що мають однакову довжину, значення кореляційної функції $K_x(t, t + \tau)$ і $K_x(t_1, t_1 + \tau)$ мають бути однаковими. Взагалі, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу повинна залежати не від положення t першого аргументу на осі абсцис, а тільки від проміжку τ між першим і другим аргументами:

$$K_x(t, t + \tau) = K_x(\tau). \quad (10.3)$$

Отже, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є функція не двох, а усього **одного аргументу**. Це обставина у ряді випадків сильно спрощує операції над стаціонарними випадковими функціями.

Умова (10.2), що вимагає від стаціонарної випадкової функції незмінності дисперсії, є окремим випадком умови (10.3). Дійсно, вважаючи у формулі (10.3) $t + \tau = t$ ($\tau = 0$), маємо:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = K_x(0) = \text{const} \quad (4)$$

Таким чином, умова (10.3) є єдина суттєва умова, якій повинна задовольняти стаціонарна випадкова функція. Тому надалі під **стаціонарною випадковою функцією** розумітимемо таку випадкову функцію, кореляційна функція якої залежить не від обох своїх аргументів t_1 і t_2 , а тільки від різниці τ між ними. Щоб не накладати спеціальних умов на математичне сподівання, розглядатимемо тільки центровані випадкові функції.

Кореляційна функція будь-якої випадкової функції має властивість симетрії:

$$K_x(t_2, t_1) = K_x(t_1, t_2).$$

Звідси для стаціонарного процесу, вважаючи $t_2 - t_1 = \tau$ маємо:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad (10.5)$$

тобто кореляційна функція $K_x(\tau)$ є парною функцією свого аргументу. Тому зазвичай кореляційну функцію визначають тільки для додатних значень аргументу (рис. 10.8).

На практиці, замість кореляційної функції $K_x(\tau)$, часто користуються нормованою кореляційною функцією:

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D},$$

де $D = K_x(0)$ – незмінна дисперсія стаціонарного процесу. Функція $R_x(\tau)$ є коефіцієнтом кореляції (нормована кореляційна функція) між перетинами випадкової функції, розділеними інтервалом τ за часом. Очевидно, що $R_x(0) = 1$.

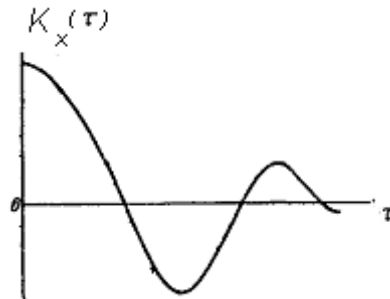


Рисунок 10.8 – Кореляційна функція стаціонарного процесу

Значення коефіцієнта кореляції лежить в межах від -1 до $+1$. Якщо випадкові величини незалежні, то коефіцієнт кореляції обов'язково дорівнює нулю, зворотнє твердження невірне. Коефіцієнт кореляції характеризує значущість лінійного зв'язку між параметрами:

- якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 1 , то значення випадкових величин повністю співпадають. Інакше кажучи, має місце функціональна залежність: знаючи значення одного параметра, можна однозначно вказати значення іншого параметра;

- якщо коефіцієнт кореляції дорівнює (-1) , то випадкові величини набувають протилежних значень. І в цьому випадку також має місце функціональна залежність;

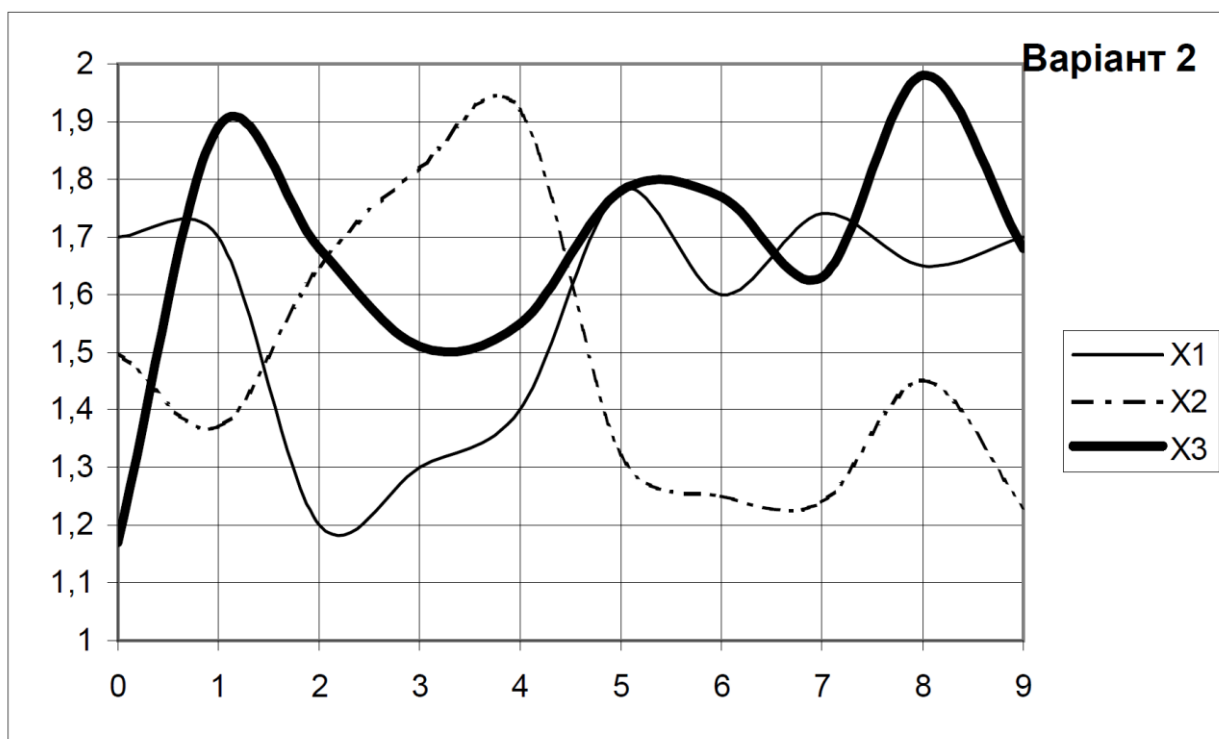
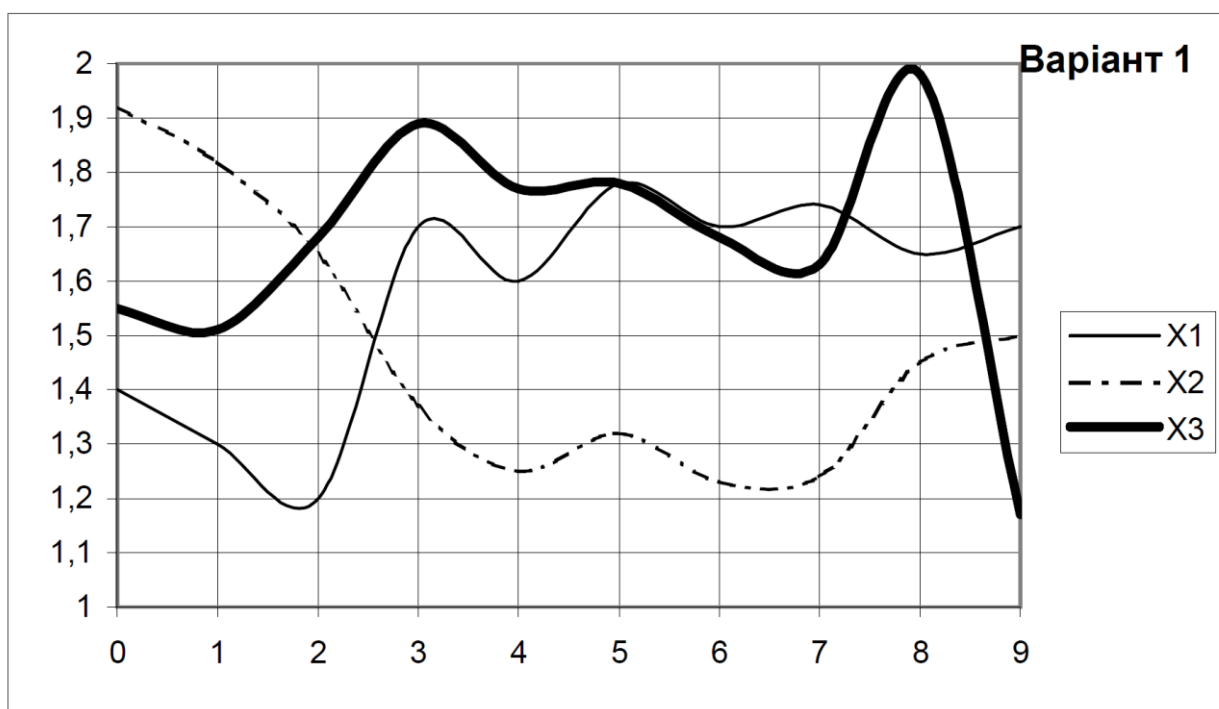
- якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 0 , то випадкові величини практично не пов'язані між собою лінійним співвідношенням. Це не означає відсутності якихось інших (наприклад, нелінійних) зв'язків між параметрами;

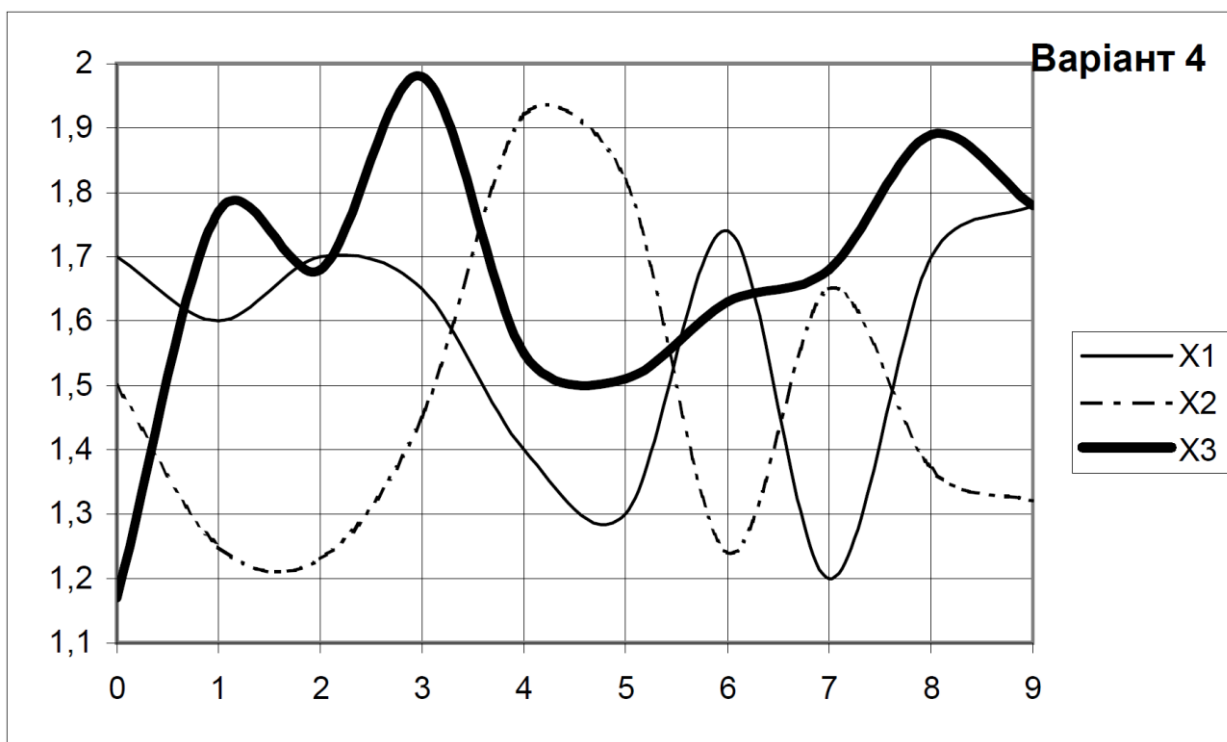
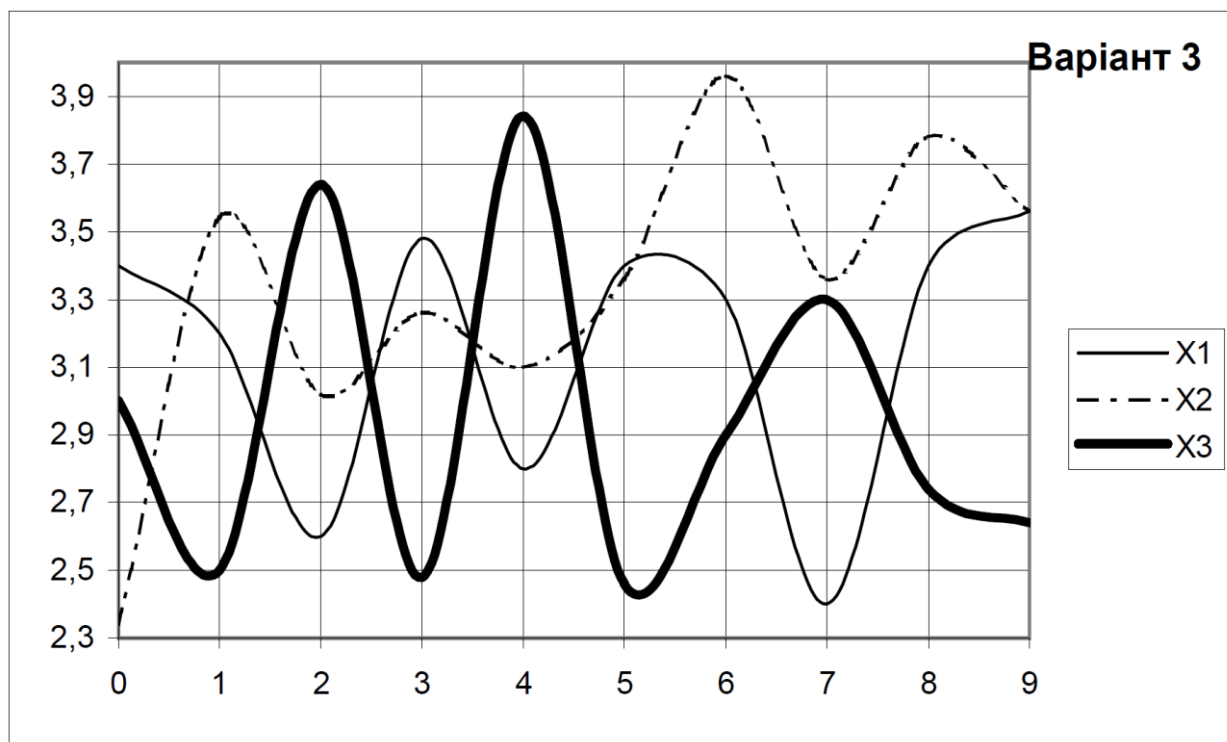
- чим менша абсолютна величина коефіцієнта кореляції, тим у меншій мірі по значеннях одного параметра можна передбачити значення іншого.

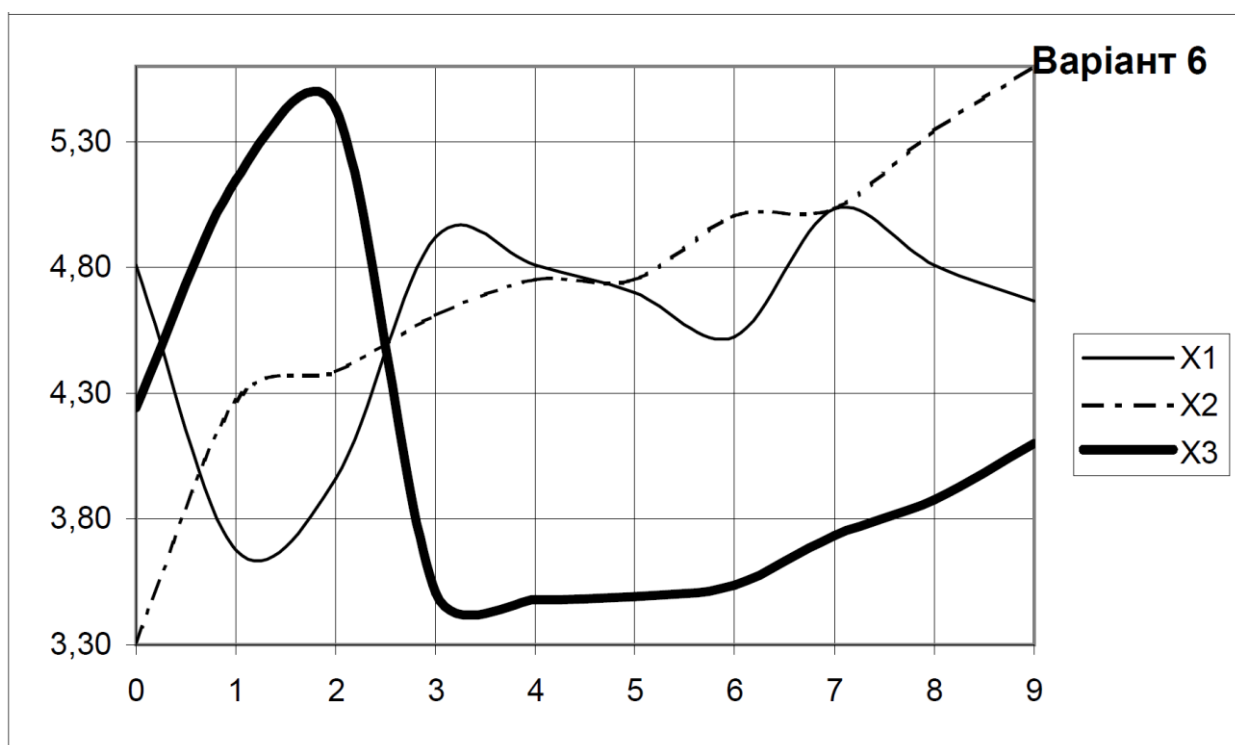
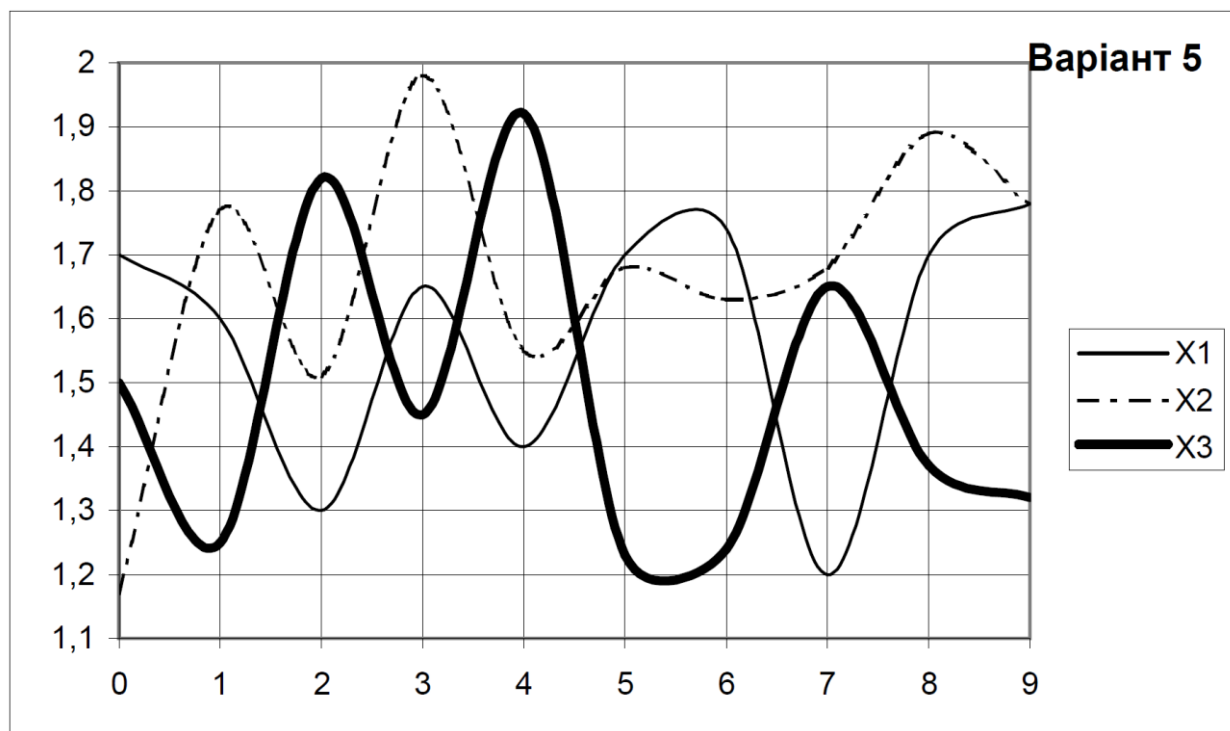
ЗАВДАННЯ

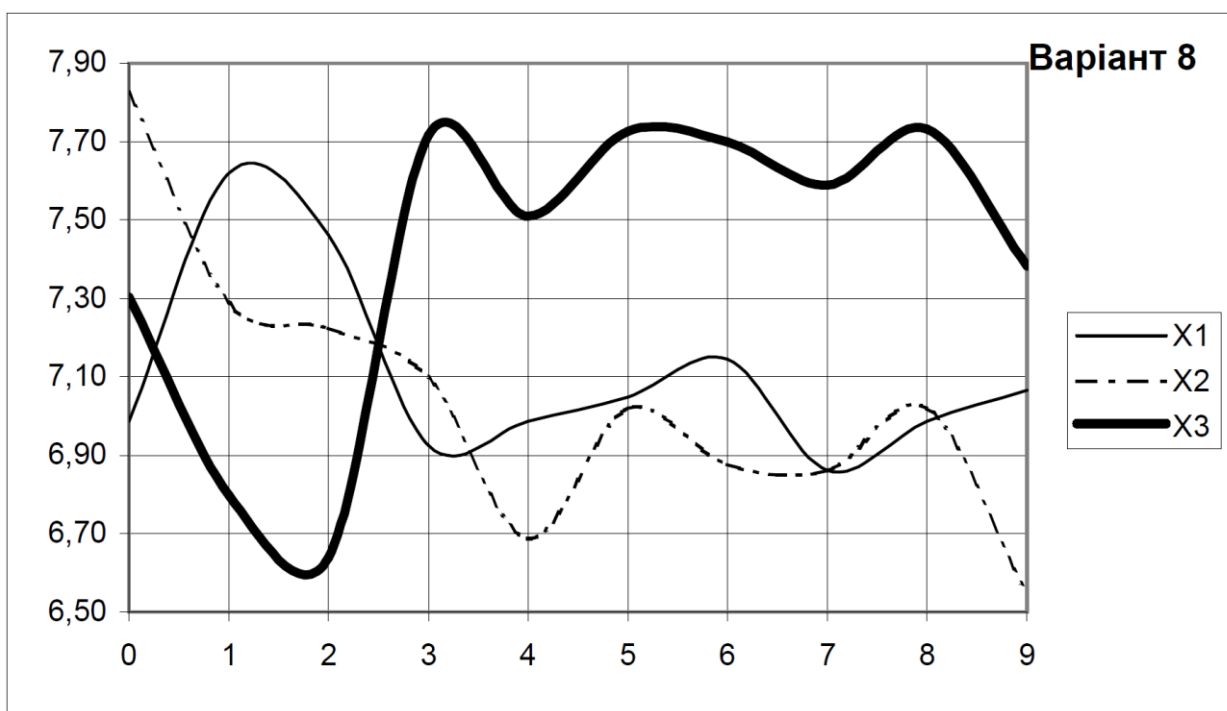
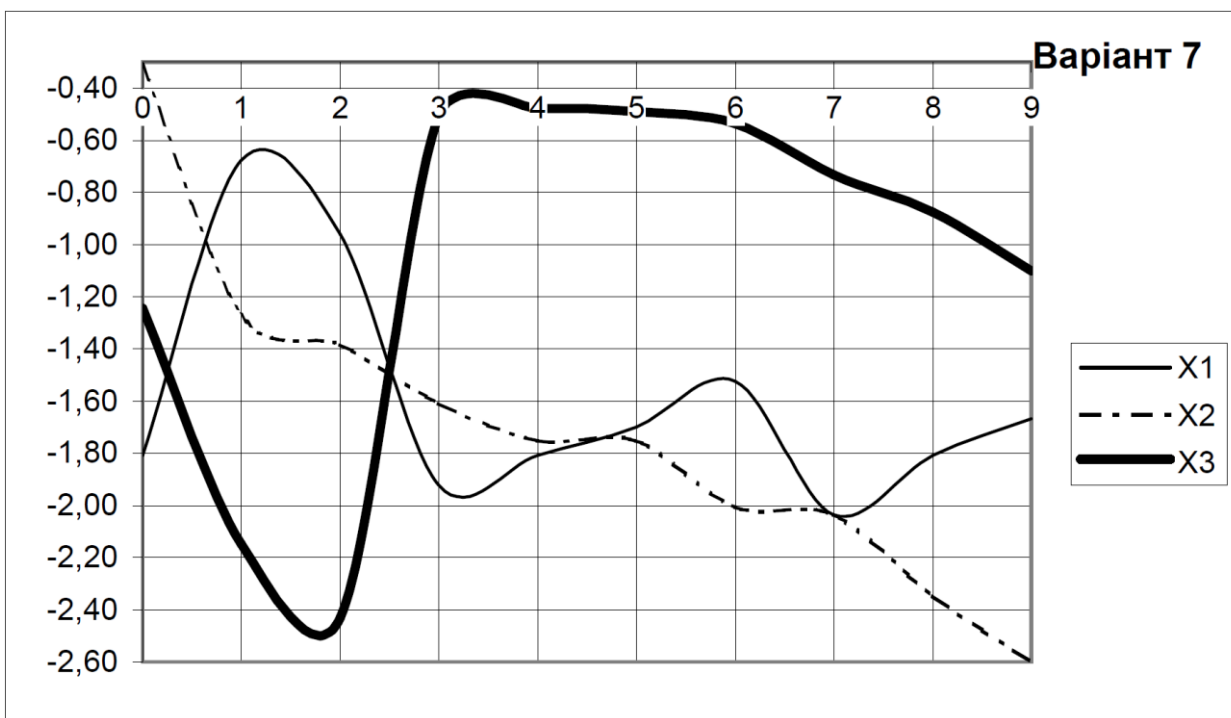
Відповідно до номеру варіанта обрати вихідні дані. Вихідними даними є ансамбль реалізацій випадкового процесу, наведений на осцилограмах нижче. Для заданого випадкового процесу необхідно обрахувати усереднені значення нормованих кореляційних моментів та побудувати корелограму. Розрахунки виконати на аркуші Excel.

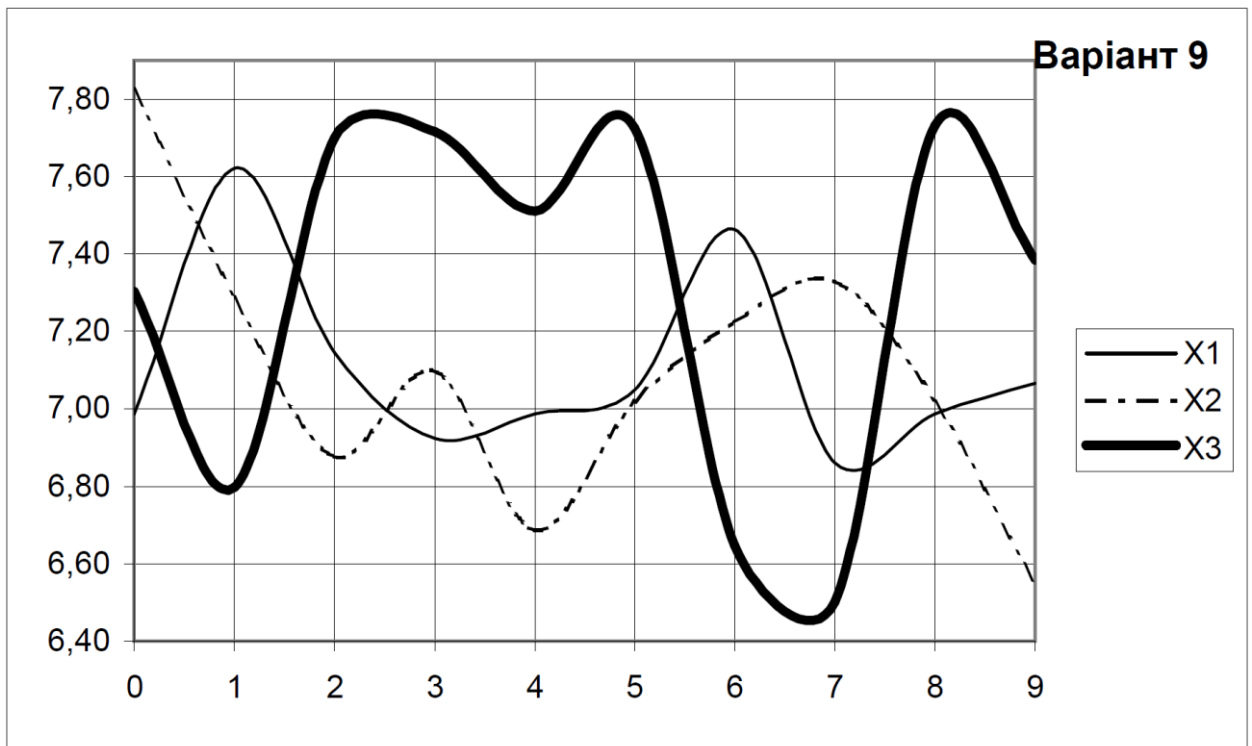
ВИХІДНІ ДАНІ











ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Для заданих реалізацій випадкового процесу X_i ($i = \overline{1, n}$, в кожному варіанті $n = 3$) слід прийняти необхідну кількість перетинів з огляду на динаміку реалізацій. Здійснити оцифрування ординат випадкового процесу і занести їх до табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Результати оцифрування ансамблю реалізацій випадкового процесу

Реалізації	Ординати випадкового процесу				
	t_0	...	t_j	...	t_k
1					
...					
i					
...					
n					

Для кожного j -го перетину обчислюють оцінки параметрів процесу:

- математичного сподівання:

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t_j), \text{ де } j = 0, 1, \dots, k;$$

- дисперсії:

$$D_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [X_i(t_j) - m_j]^2;$$

- стандартного відхилення:

$$S_{\zeta_j} = \sqrt{D_{\zeta_j}};$$

- відхилення від математичного сподівання:

$$m_{\zeta_j} \pm S_{\zeta_j}.$$

Результати обчислень значень параметрів m_{ζ_j} , D_{ζ_j} , S_{ζ_j} , $m_{\zeta_j} \pm S_{\zeta_j}$ необхідно занести до табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Оцінки параметрів процесу по перетинах

Оцінка	Чисельні значення оцінок по перетинах				
	t_0	...	t_j	...	t_k
m_{ζ_j}					
D_{ζ_j}					
S_{ζ_j}					
$m_{\zeta_j} \pm S_{\zeta_j}$					
$m_{\zeta_j} \pm S_{\zeta_j}$					

Таблиця кореляційної функції обчислюється шляхом визначення виправлених вибірових кореляційних моментів відповідно до наступної формули:

$$K_{f_{\zeta_j, t_l}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [k_{i_{\zeta_j}} - m_{\zeta_j}] [k_{i_{\zeta_l}} - m_{\zeta_l}],$$

де $j, l = 0, 1, \dots, k$; тобто виправлені кореляційні моменти визначаються на відстані $0t \dots kt$ -кроків, причому якщо $t_j = t_l$, то $K_{f_{\zeta_j, t_l}} = D_{\zeta_j}$.

Значення виправлених вибірових кореляційних моментів заносяться до табл. 10.3.

Таблиця 10.3

Виправлені вибірові кореляційні моменти

t_l	t_0	...	t_l	...	t_k
t_j					
t_0	$K_{f_{\zeta_0, t_0}}$...	$K_{f_{\zeta_0, t_l}}$...	$K_{f_{\zeta_0, t_k}}$
...	
t_j			$K_{f_{\zeta_j, t_l}}$...	$K_{f_{\zeta_j, t_k}}$
...			
t_k					$K_{f_{\zeta_k, t_k}}$

Нормовані кореляційні моменти:

$$r_{f,j,t_l} = \frac{K_{f,j,t_l}}{S_j S_{t_l}},$$

причому при $t_j = t_l$, $r_{f,j,t_l} = 1$.

Значення нормованих кореляційних моментів заносяться до табл. 10.4.

Таблиця 10.4

Нормовані кореляційні моменти

t_j	t_l	t_0	...	t_l	...	t_k
t_0		1	...	$r_{f,0,t_l}$...	$r_{f,0,t_k}$
...			1
t_j				1	...	r_{f,j,t_k}
...					1	...
t_k						1

Побудова корелограми виконується для стаціонарних випадкових процесів, тобто у тому випадку, коли $m = \text{const}$, а кореляційна функція не залежить від величини аргументів, а залежить тільки від їх різниці.

Для цього знаходять усереднені значення:

- математичного сподівання $m_x = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k m_j$;

- дисперсії $D_x = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k D_j$;

- стандартного відхилення $S_x = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k S_j$.

- нормованих кореляційних моментів в кожній діагоналі таблиці, виходячи з парності кореляційної функції:

$$R_x(0t) = \left| \frac{1}{k} \sum_{j=0, l=0}^k r_{f,j,t_l} \right| - \text{для головної діагоналі з кроком } 0t, R_x(0t) = 1;$$

$$R_x(1t) = \left| \frac{1}{k-1} \sum_{j=0, l=1}^k r_{f,j,t_l} \right| - \text{для діагоналі з кроком } 1t;$$

...

$$R_x(kt) = |r_{f,0,t_k}| - \text{для діагоналі з кроком } kt.$$

Усереднені значення нормованих кореляційних моментів по діагоналях кореляційної матриці заносяться до табл. 10.5.

Таблиця 10.5

Усереднені значення нормованих кореляційних моментів по діагоналях кореляційної матриці

Ширина кроку τ	$0t$...	lt	...	kt
Значення R_x	$ R_x $...	$ R_x $...	$ R_x $

За даними табл. 10.5 будується корелограма, симетрична відносно осі ординат.

Приклад параметричного оцінювання випадкового процесу у Excel наведено на рис. 10.9 – 10.12.

ВМІСТ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Тема, мета роботи
2. Основні аналітичні залежності, за якими проводилися розрахунки.
3. Результати оцифровування ансамблю реалізацій випадкового процесу.
4. Оцінки параметрів процесу по перетинах.
5. Виправлені вибіркові кореляційні моменти.
6. Нормовані кореляційні моменти.
7. Усереднені значення нормованих кореляційних моментів по діагоналях кореляційної матриці.
8. Корелограма.
9. Висновки з аналізом отриманих результатів.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Яка функція називається випадковою?
2. Що таке випадковий процес?
3. Дайте визначення реалізації випадкового процесу.
4. Що таке перетин випадкового процесу?
5. Який випадковий процес називається стаціонарним, нестаціонарним?
6. Дати визначення математичному сподіванню та дисперсії випадкової функції.
7. Яка функція називається кореляційною?

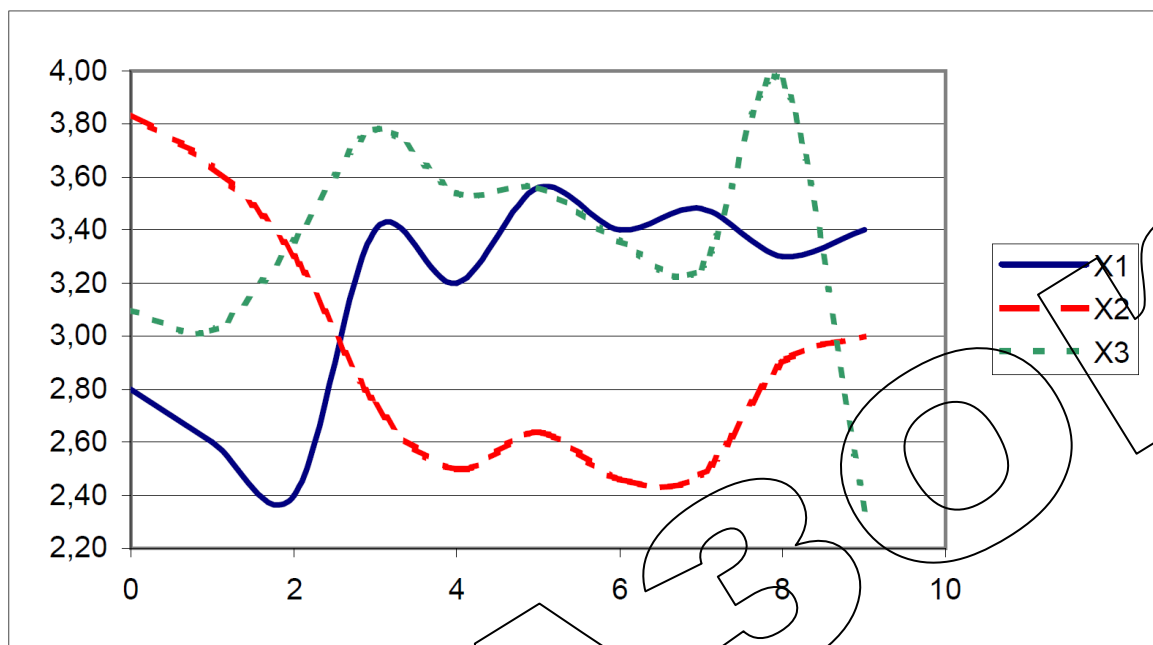


Рисунок 1 - Реалізації випадкового процесу

Таблиця 1 - Результати оцифровування ансамблю реалізацій випадкового процесу

		Ординати випадкового процесу (t_j)									
Реалі- зації		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	X1	2,80	2,60	2,40	3,40	3,20	3,56	3,40	3,48	3,30	3,40
	X2	3,84	3,64	3,30	2,74	2,50	2,64	2,46	2,48	2,90	3,00
	X3	3,10	3,02	3,36	3,78	3,54	3,56	3,36	3,26	3,96	2,34

Кількість реалізацій

$n = 3$

Кількість перетинів

$k = 9$

Рисунок 10.9 - Приклад параметричного оцінювання випадкового процесу у Excel

Таблиця 2 - Оцінки параметрів процесу за перетинами

Характеристики	Ординати випадкового процесу (t_j)										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$m(t)$	3,25	3,09	3,02	3,31	3,08	3,25	3,07	3,07	3,39	2,91
	$D(t)$	0,2865	0,2737	0,2892	0,2769	0,2812	0,2821	0,2825	0,2761	0,2865	0,2865
	$S(t)$	0,5353	0,5232	0,5378	0,5262	0,5303	0,5312	0,5315	0,5255	0,5353	0,5353
	$m(t)-S(t)$	2,7114	2,5635	2,4822	2,7804	2,5497	2,7222	2,5418	2,5478	2,8514	2,3780
	$m(t)+S(t)$	3,7820	3,6099	3,5578	3,8329	3,6103	3,7845	3,6049	3,5988	3,9220	3,4486

Як можна встановити з табл. 2, для всіх перетинів значення математичного сподівання і дисперсії зберігаються практично незмінними, що дозволяє зробити попередній висновок про стаціонарність випадкового процесу

Таблиця 3 - Виправлені вибіркові кореляційні моменти

t(j)	X1(tj)-m(tj)	X2(tj)-m(tj)	X3(tj)-m(tj)	tl=										
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
				X1(tl)-m(tl)=	-0,45	-0,49	-0,62	0,09	0,12	0,31	0,33	0,41	-0,09	0,49
				X2(tl)-m(tl)=	0,59	0,55	0,28	-0,57	-0,58	-0,61	-0,61	-0,59	-0,49	0,09
X3(tl)-m(tl)=	-0,15	-0,07	0,34	0,47	0,46	0,31	0,29	0,19	0,57	-0,57				
0	-0,45	0,59	-0,15	0,2865	0,2777	0,1966	-0,2237	-0,2326	-0,2729	-0,2759	-0,2805	-0,1671	-0,0409	
1	-0,49	0,55	-0,07		0,2737	0,2170	-0,1953	-0,2050	-0,2545	-0,2587	-0,2693	-0,1327	-0,0753	
2	-0,62	0,28	0,34			0,2892	-0,0278	-0,0402	-0,1288	-0,1384	-0,1774	0,0562	-0,2362	
3	0,09	-0,57	0,47				0,2769	0,2788	0,2607	0,2569	0,2313	0,2695	-0,1375	
4	0,12	-0,58	0,46					0,2812	0,2668	0,2634	0,2394	0,2678	-0,1278	
5	0,31	-0,61	0,31						0,2821	0,2821	0,2729	0,2239	-0,0399	
6	0,33	-0,61	0,29							0,2825	0,2751	0,2173	-0,0293	
7	0,41	-0,59	0,19								0,2761	0,1803	0,0197	
8	-0,09	-0,49	0,57									0,2865	-0,2065	
9	0,49	0,09	-0,57										0,2865	

Рисунок 10.10 - Приклад параметричного оцінювання випадкового процесу у Excel

Таблиця 4 - Нормовані кореляційні моменти

		tl=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t(j)	S(tj)	S(tl)=	0,5353	0,5232	0,5378	0,5262	0,5303	0,5312	0,5315	0,5255	0,5353	0,5353
0	0,5353		1	0,991691	0,682962	-0,79401	-0,81943	-0,95998	-0,9698	-0,99733	-0,58306	-0,14286
1	0,5232			1	0,771253	-0,70921	-0,73889	-0,91591	-0,93037	-0,97964	-0,47371	-0,26899
2	0,5378				1	-0,09823	-0,14097	-0,45091	0,48417	-0,62776	0,195231	-0,82053
3	0,5262					1	0,999074	0,932547	0,918301	0,836308	0,956836	-0,48824
4	0,5303						1	0,94722	0,934487	0,859126	0,943442	-0,45023
5	0,5312							1	0,999292	0,977845	0,787362	-0,14022
6	0,5315								1	0,985029	0,763608	-0,10286
7	0,5255									1	0,640868	0,070154
8	0,5353										1	-0,7208
9	0,5353											1

Усереднені за часом оцінки параметрів процесу:

mx= 3,14
Dx= 0,2821
Sx= 0,5312

Таблиця 5 - Усереднені значення нормованих коерляційних моментів за діагоналями кореляційної матриці

Ширина кроку (+T)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ширина кроку (-T)	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Rx(T)	1	0,612821	0,438928	0,068302	-0,09666	-0,40229	-0,56061	-0,76385	-0,42603	-0,14286

Рисунок 10.11 - Приклад параметричного оцінювання випадкового процесу у Excel

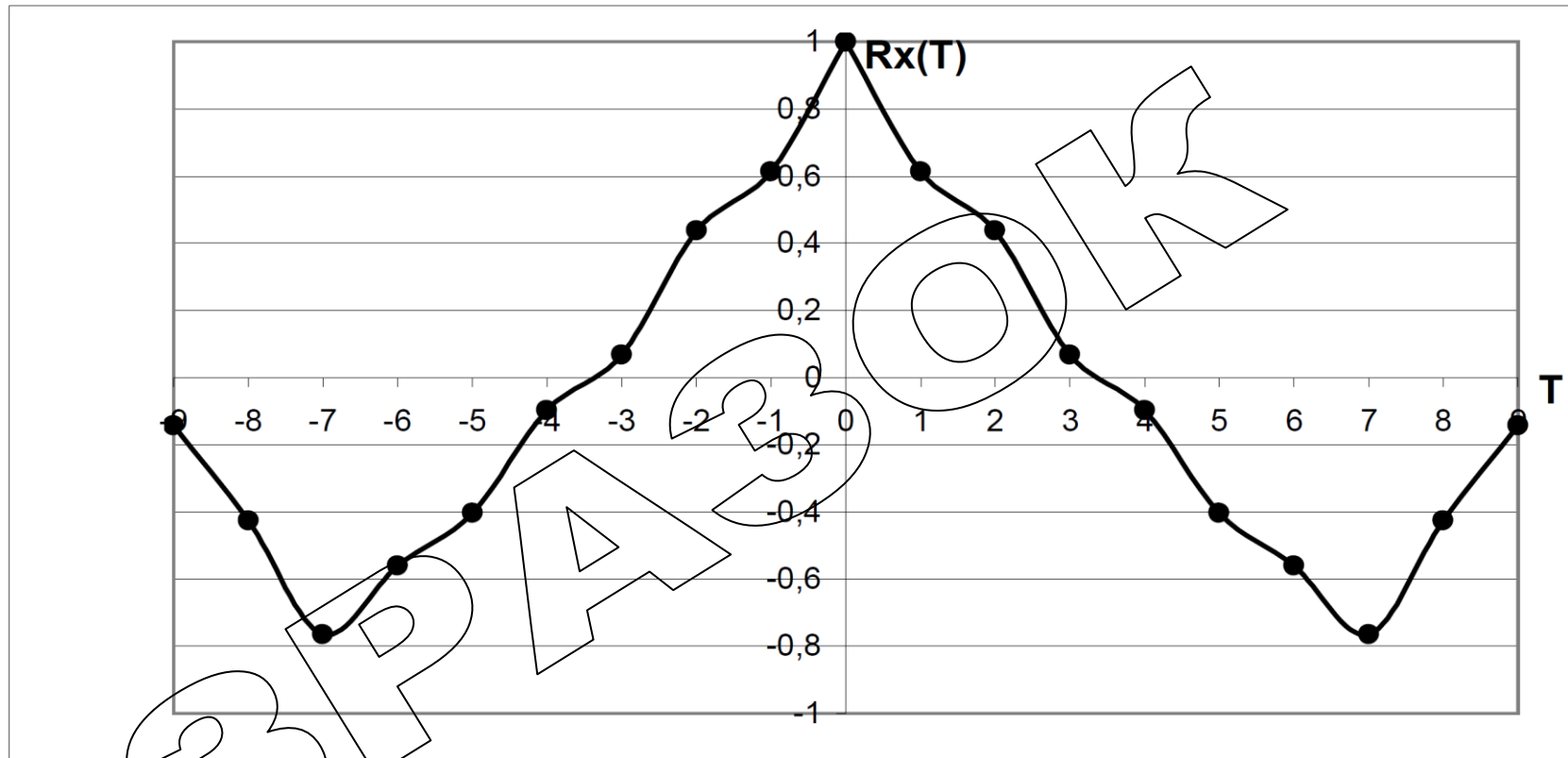


Рисунок 2 - Емпірична корелограма

При аналізі корелограми можна встановити, що мають місце від'ємні значення кореляційної функції при деяких T . Це вказує на те, що в структурі випадкового процесу має місце деякий елемент періодичності, у зв'язку з чим на відстані за часом, що приблизно дорівнює половині періоду основних коливань, спостерігається від'ємна кореляція між значеннями випадкового процесу: додатних відхиленням від середнього в одному перетині відповідають від'ємні відхилення через визначений період часу, і навпаки.

Рисунок 10.12 - Приклад параметричного оцінювання випадкового процесу у Excel

ЛІТЕРАТУРА

- 1 Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. Математичне моделювання в електроенергетиці : підручник. Львів : Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. 608 с.
- 2 Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики. 3-е вид., перероб. і доп. Львів : Вища шк., 1989. 464 с.
- 3 Чуа Л. О., Лин Пен-Мин Машинный анализ электронных схем. Алгоритмы и вычислительные методы; пер. с англ. М. : Энергия, 1980. 640 с.
- 4 Сивокобиленко В. Ф., Василець С. В. Математичне моделювання перехідних процесів в електротехнічних комплексах шахтних електричних мереж : монографія. Луцьк : Вежа-Друк, 2017. 272 с.
- 5 Сивокобиленко В. Ф. Математичне моделювання в електротехніці і енергетиці: навчальний посібник. Донецьк : РВА ДонНТУ, 2005. 350 с.
- 6 Демирчан К. С., Бутырин П. А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М. : Высш. шк., 1988. 335с.
- 7 Моделювання електромеханічних систем : підручник / О. П. Чорний та ін. Кременчук: [б. в.], 2001. 410 с.
- 8 Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. М. : ДМК Пресс; СПб. : Питер, 2008. 288 с.
- 9 Черных И. В. Simulink: Инструмент моделирования динамических систем. Питер : ДМК Пресс, 2008. 400 с.
- 10 Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 2001. 327 с.
- 11 Калабеков Б. А., Лapidус В. Ю., Малафеев В. М. Методы автоматизированного расчета электронных схем в технике связи : учеб. пособие для вузов. М. : Радио и связь, 1990. 272 с.
- 12 Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: уч. пособ. СПб. : КОРОНА принт, 2001. 320 с.
- 13 Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы; пер. с англ. М. : Мир, 1984. 455 с.
- 14 Шрейнер Р. Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. Екатеринбург: УРО РАН, 2000. 654 с.
- 15 Чабан В. Й. Математичне моделювання в електротехніці. Львів : Видавництво Т. Сороки, 2010. 508 с.
- 16 Wang Xi-Fan, Yonghua Song, Malcolm Irving Modern Power Systems Analysis. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 559 p.
- 17 Watson N., Arrillaga J. Power systems electromagnetic transients simulation. London: Institution of Engineering and Technology, 2007. 449p.

- 18 Попович О. М. Математична модель асинхронної машини електромехатронної системи для імітаційного та структурного моделювання. *Технічна електродинаміка*. 2010. №4. С. 25-32.
- 19 Чорний О. П., Титюк В. К. Особливості дослідження моделей систем електроприводу у SIMPOWERSYSTEMS з ключовими елементами. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2013. Вип. 3. С. 33-48.
- 20 Півняк Г. Г., Винославський В. М., Рибалко А. Я., Несен Л. І. Перехідні процеси в системах електропостачання. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2002. 597 с.